VOL 35, NÚMERO 1, AÑO 2022

# COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE EQUIVALENCIA LÓGICA A TRAVÉS DEL MODELO DE PIRIE Y KIEREN

# UNDERSTANDING THE CONCEPT OF LOGICAL EQUIVALENCE THROUGH THE PIRIE AND KIEREN MODEL

**Eduardo Adam Navas-López**
**Universidad de El Salvador (El Salvador)**
eduardo.navas@ues.edu.sv

## Resumen

En este artículo se analiza el proceso que sigue un grupo de alumnos universitarios para determinar una equivalencia lógica. Para ello se analiza la actividad de dichos alumnos cuando resuelven en el aula de clases la tarea de determinar si una expresión lógica es lógicamente equivalente a otra. Esto ha permitido describir el crecimiento, progreso o evolución de su comprensión a través de los diferentes niveles de comprensión siguiendo el modelo propuesto por Pirie y Kieren. Las interacciones entre los alumnos les permiten avanzar desde el nivel de Conocimiento Primitivo hasta el nivel de Observación.

**Palabras clave**: pirie y kieren, modelo mental, equivalencia lógica, demostración matemática

## Abstract

This article analyzes the process followed by a group of university students to determine a logical equivalence. The activity of these students is analyzed when they solve, in the classroom, the task of determining whether a logical expression is logically equivalent to another. This has made it possible to describe the growth, progress or evolution of their understanding through the different levels of understanding, following the model proposed by Pirie and Kieren. Interactions between students allow them to advance from the primitive knowledge level to the observation level.

**Key words**: pirie and kieren, mental model, logical equivalence, mathematical proof

## Introducción

El estudio de las demostraciones formales es fundamental para los estudiantes de carreras con fuerte carga matemática. Entre otras cosas, es necesario formar adecuadamente el conocimiento de la naturaleza de las demostraciones matemáticas, y particularmente la noción de Validez Lógica, para lo cual es necesario el conocimiento del concepto de Equivalencia Lógica (Alfaro Carbajal, Flores Martínez y Valverde Soto, 2019). Por ello es importante que los primeros cursos de carreras como Licenciatura en Matemática y Licenciatura en Estadística enfaticen la importancia del concepto de Equivalencia Lógica.

El profesor formador de matemáticos debe conocer los rudimentos de la evolución de la comprensión de un concepto tan elemental. Por ello nos preguntamos, ¿cómo se caracteriza la evolución o el crecimiento de la comprensión del concepto de Equivalencia Lógica en los alumnos de primer año de carreras como las mencionadas?

Así es como en este estudio se explora el crecimiento de la comprensión del concepto de Equivalencia Lógica en un grupo de alumnos basándose en el modelo de Crecimiento de la Comprensión Matemática de Pirie y Kieren (1989, 1994).

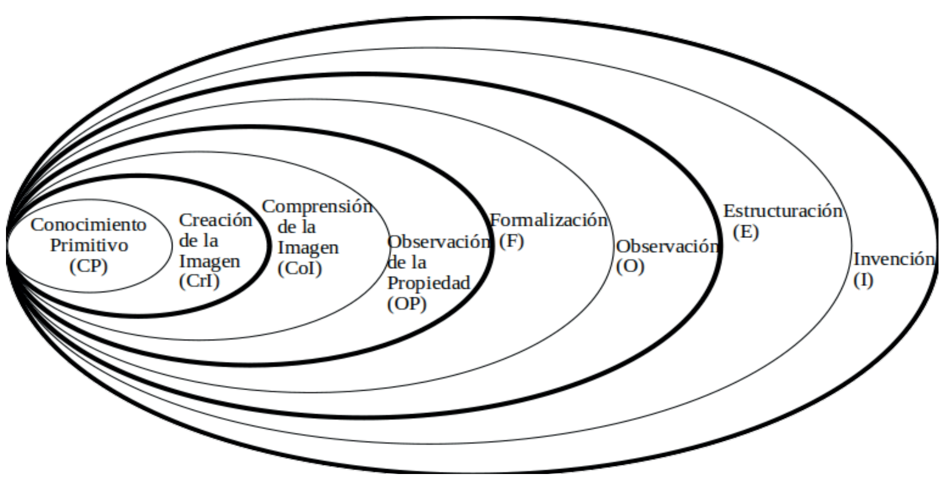
## Marco teórico

Existen múltiples aproximaciones al concepto Comprensión (Meel, 2003). Una de estas aproximaciones es la base del modelo de Pirie y Kieren (1989):

La comprensión matemática se puede definir como estable pero no lineal. Es un fenómeno recursivo, y la recursión parece ocurrir cuando el pensamiento cambia los niveles de sofisticación. De hecho, cada nivel de comprensión se encuentra contenido dentro de los niveles subsiguientes. Cualquier nivel particular depende de las formas y los procesos del mismo y, además, se encuentra restringido por los que están fuera de él. (p. 8)

El de Pirie y Kieren (1989) es un modelo de ocho niveles: Conocimiento Primitivo, Creación de Imagen, Comprensión de la Imagen, Observación de la Propiedad, Formalización, Observación, Estructuración, e Invención. Se han tomado las traducciones de Meel (2003). Ver Figura 1.

***Figura 1:*** *Esquema del Modelo de Pirie y Kieren (1989, 1994)*



A continuación, se presentan brevemente las descripciones de los niveles:

«Conocimiento Primitivo» (CP) se refiere al conocimiento previo que el alumno tiene. Es el punto inicial, posiblemente una gran cantidad de información que puede o no dar forma a la evolución de la comprensión. Está formado por todo lo que el estudiante sabe y puede hacer excepto el conocimiento sobre el concepto considerado. Lo que el estudiante ya sabe sobre el concepto objeto de estudio forma parte del resto de niveles del modelo.

«Creación de Imagen» (CrI) es el nivel donde se desarrollan las conexiones entre los referentes y los símbolos, formando imágenes (no necesariamente pictóricas). Cuando el estudiante precisa de actividades concretas para representar de algún modo el concepto matemático objeto de estudio, se encuentra en este nivel.

«Comprensión de la Imagen» (CoI) es cuando se desarrollan las imágenes mentales. Si el alumno es capaz de utilizar una construcción mental sobre el concepto sin necesidad de realizar actividades concretas o trabajar con ejemplos particulares, el alumno se encontrará en este nivel.

«Observación de la Propiedad» (OP) es cuando se desarrollan las propiedades que relacionan que Vinner (1983) llama Imagen de Concepto. Es decir que se alcanza este nivel cuando el estudiante trabaja con las imágenes que ya posee y es capaz de reflexionar buscando propiedades y tratando de generalizarlas.

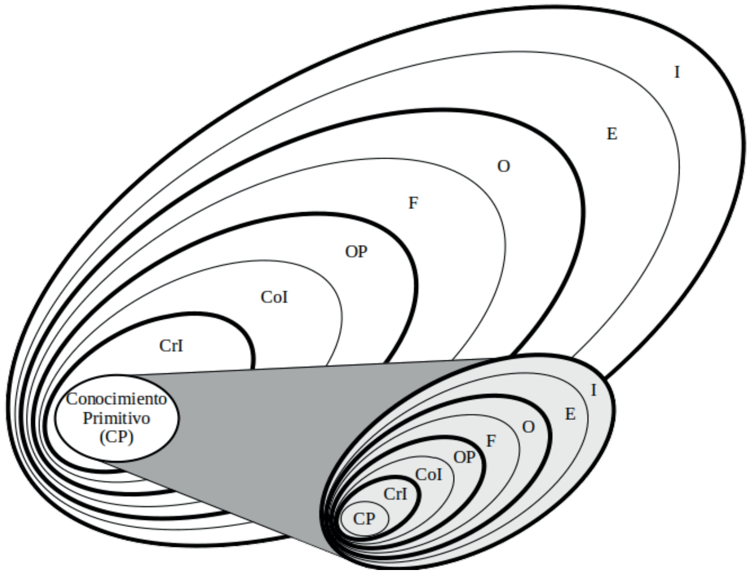
«Formalización» (F) es cuando se forman propiamente las Definiciones de Concepto de Vinner (1983) donde las definiciones generales proporcionadas por los estudiantes deben ser equivalentes a una definición matemática adecuada, aunque el lenguaje utilizado para describir el concepto no tiene necesariamente que ser un lenguaje matemático formal. Es cuando el alumno tiene la capacidad de pensar sobre las propiedades ya generalizadas y trabajar con el concepto como objeto formal, sin hacer referencia a una acción o imagen particular.

«Observación» (O) es el nivel en el que el estudiante es capaz de observar, estructurar y organizar los procesos de pensamiento personales y reconocer las ramificaciones de los procesos de pensamiento. Además es cuando puede combinar las definiciones, ejemplos, teoremas y demostraciones para identificar los componentes, las conexiones y los medios para cruzar en tales conexiones.

«Estructuración» (E) es cuando el estudiante puede explicar propiedades mediante un sistema axiomático. En este momento el estudiante es capaz de concebir las demostraciones de las propiedades asociadas al concepto.
«Invención» (I) es el nivel en el que el alumno tiene la capacidad de liberarse del conocimiento estructurado que representa la comprensión total y puede crear preguntas totalmente nuevas que tendrían como resultado el desarrollo de un concepto nuevo. Es decir, cuando el alumno es capaz de preguntarse ¿qué pasaría si…?

Como describen Pirie y Kieren (1990, 1994), este es un modelo de naturaleza fractal, ya que los niveles externos crecen en forma recursiva desde los niveles internos, pero el conocimiento a un nivel externo permite y retiene los niveles internos. Los niveles externos se insertan y envuelven a los internos. Ver Figura 2.

***Figura 2:*** *Naturaleza recursiva de los niveles del modelo de Pirie y Kieren*




Una característica muy importante del modelo es el *Redoblado* (Pirie y Kieren, 1994). Cuando el alumno se encuentra con un problema cuya solución no se puede encontrar en forma inmediata, es necesario volver a doblar para llegar a un estrato más interno y luego extender la comprensión actual e inadecuada a partir de ahí. Esto provoca la re-examinación de la comprensión de forma diferente a como se hizo previamente.

Otra característica del modelo son los *Límites de Falta de Necesidad* (Pirie y Kieren, 1994). Estos límites ocurren cuando el estudiante pasa a una comprensión más elaborada y estable que no requiere necesariamente los elementos de los estratos más bajos. Estos límites son tres: (a) entre los niveles Creación de Imagen (CrI) y Comprensión de la Imagen (CoI), (b) entre los niveles de Observación de la Propiedad (OP) y Formalización (F), y (c) entre los niveles de Observación (O) y Estructuración (E). Estos límites pueden verse en las Figuras 1 y 2 como líneas divisorias más gruesas.

Este modelo se ha utilizado en múltiples investigaciones para explorar y caracterizar la comprensión de diferentes conceptos matemáticos.

Meel (2003) hace una revisión de la evolución reciente de algunos marcos teóricos sobre la comprensión matemática, como las teorías de Pirie y Kieren (1989, 1990, 1992, 1994), la APOE de Dubinsky (1991), Dubinsky y Mcdonald (2001), los obstáculos cognitivos de Cornu (1991) y Sierpińska (1987) sobre el concepto de límite, la definición de concepto e imagen de concepto de Tall y Vinner (1981), y Vinner (1983, 1991), las representaciones múltiples de Kaput (1985) y sobre las concepciones operacionales y estructurales de Sfard (1991). Principalmente el artículo analiza y compara las definiciones de Comprensión Matemática propuestas por el modelo de Pirie y Kieren y el de Dubinsky, que según Meel (2003) son ambos de origen constructivista.

La tesis doctoral de Gallardo Romero (2004) analiza la comprensión del conocimiento del algoritmo estándar para la multiplicación de números naturales en estudiantes de primaria utilizando dos modelos, uno de ellos es el de Pirie y Kieren (1989, 1994).

El artículo de Martin (2008) desarrolla en mayor profundidad el marco teórico del proceso de redoblado, que es clave en el modelo de Pirie y Kieren (1989, 1994).

La tesis doctoral de Villa Ochoa (2011) estudia la comprensión de la tasa de variación de funciones reales en un curso de precálculo como una manera de ofrecer una interpretación variacional de la derivada antes de estudiar el concepto de derivada, utilizando este modelo.

Los artículos de Codes Valcarce, Delgado Martín, González Astudillo y Monterrubio Pérez (2013) y Delgado Martín, Codes Valcarce, Monterrubio Pérez y González Astudillo (2014) estudian la comprensión por parte de estudiantes universitarios del concepto de serie numérica y otros conceptos asociados, como límite, infinito y sumas parciales, utilizando también el modelo de Pirie y Kieren (1989, 1994).

Más recientemente, Plazas Alvarado (2020) reporta el uso el modelo de Pirie y Kieren (1989, 1994) para desarrollar una unidad didáctica sobre el cálculo de áreas de regiones delimitadas por sectores circulares y cuerdas de circunferencia en un curso de geometría para estudiantes de ingeniería.

Carmona Correa (2020) en su tesis de maestría realiza un estudio de casos en alumnos de quinto grado de primaria sobre su comprensión de los conceptos de paralelismo y perpendicularidad basándose en el modelo de Pirie y Kieren (1989, 1994). En este estudio hubo tres grupos con avances diferentes, unos lograron llegar al nivel de Creación de Imagen (CrI), otro logró llegar al nivel Comprensión de la Imagen (CoI), y un tercer grupo logró llegar al nivel de Observación de la Propiedad (OP). Con esto se muestra que los resultados individuales de la comprensión de conceptos matemáticos, incluso sencillos, son bastante heterogéneos a pesar de tratarse de un mismo grupo de alumnos más o menos homogéneo.

Angulo Vergara, Arteaga Valdés y Carmenates Barrios (2020) analizan teóricamente la relación entre los modelos de desarrollo de razonamiento geométrico de van Hiele y de comprensión de conceptos matemáticos de Pirie y Kieren (1989, 1994) con el nivel de desarrollo del lenguaje y del pensamiento de los alumnos de primaria.

## Metodología

En este estudio se analizan las conversaciones grabadas de unos alumnos universitarios de primer año mientras resuelven una serie de ejercicios de equivalencias lógicas. La grabación fue transcrita y analizada posteriormente para identificar cada intervención junto con el avance logrado en la demostración hasta ese momento y el nivel de comprensión del concepto según el modelo de Pirie y Kieren.

En las clases teóricas se ha explicado previamente los fundamentos de la lógica proposicional, identificación de proposiciones, los conectivos lógicos, conversión de representación verbal a representación simbólica (y viceversa) de expresiones lógicas, concepto de equivalencia lógica, y propiedades del álgebra de Boole o álgebra proposicional (leyes de DeMorgan, idempotencia, doble negación, etc.) resumidas en la Tabla 1. En teoría todo esto forma parte del Conocimiento Primitivo (CP) para el concepto de Equivalencia Lógica.

**Tabla 1.** *Tabla de Equivalencias Lógicas.*

| | |
|---|---|
| Doble negación | $\neg\neg p \Leftrightarrow p$ |
| Leyes conmutativas | $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$<br>$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$<br>$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$ |
| Leyes asociativas | $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$<br>$[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ |
| Leyes distributivas | $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$<br>$[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ |
| Leyes de idempotencia | $p \vee p \Leftrightarrow p$<br>$p \wedge p \Leftrightarrow p$ |
| Leyes de identidad | $p \vee 0 \Leftrightarrow p$<br>$p \wedge 1 \Leftrightarrow p$ |
| Leyes de dominación | $p \vee 1 \Leftrightarrow 1$<br>$p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$ |
| Leyes de negación | $p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$<br>$p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$ |
| Leyes de De Morgan | $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$<br>$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ |
| Leyes de absorción | $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$<br>$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ |
| Contrarrecíproca | $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ |
| Implicación | $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$<br>$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$ |
| O exclusivo | $(p \oplus q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$ |
| Si y sólo si | $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$<br>$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)]$<br>$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \oplus q)$ |

Fuente. Elaboración propia.

El álgebra proposicional se estudia en el primer ciclo del primer año de la carrera de Licenciatura en Matemática y Licenciatura en Estadística en la primera unidad de la materia Lógica Matemática. Los conocimientos previos de los estudiantes antes de comenzar la unidad son los adquiridos en la educación media.

La actividad fue diseñada para lograr que los alumnos, agrupados por afinidad, adquirieran una comprensión más completa del concepto de equivalencia lógica a través de la demostración de que una cierta proposición es lógicamente equivalente a otra. Para resolver la actividad, los alumnos disponían de sus apuntes de clase de la materia, una tabla de resumen de las propiedades del Álgebra de Proposicional (Tabla 1) previamente explicada, y de asistencia de parte del profesor.

Este ejercicio se llevó a cabo con todos los alumnos del curso, pero la grabación sólo contiene la discusión completa de tres alumnos en primera matrícula en la materia (es decir que es la primera vez que cursan la materia), que estuvieron de acuerdo con dejar que el profesor los grabara con la condición de mantener el anonimato.

El ejercicio era el siguiente:

"Demuestre por medio de la aplicación de propiedades del Álgebra Proposicional que se cumplen las siguientes equivalencias lógicas:

1. $(p \vee q) \wedge \neg p \Leftrightarrow \neg p \wedge q$
2. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$
3. $(p \vee q) \rightarrow r \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$"

## Resultados y análisis de resultados

Se analizan las conversaciones, los razonamientos expresados y las acciones realizadas, a la luz del modelo de Pirie y Kieren (1989, 1994) de los alumnos A, B y C. Se han incorporado entre corchetes los niveles de comprensión que la conversación induce a creer que tienen los alumnos en los momentos clave. También si incluyen las intervenciones del profesor (P). Se dividirá esta sección según los ejercicios que el grupo iba resolviendo secuencialmente, luego de la conversación de cada ejercicio se incluye una tabla con el procedimiento realizado por los alumnos, y al final se presentará un gráfico con los avances de cada alumno de acuerdo a cada ejercicio resuelto.

### *Ejercicio 1*

Primero los alumnos proceden a leer el enunciado.
A: (Lee). – Demuestre por medio de la aplicación …
B: – Ah, tenemos que usar la tabla. [Se refiere a la tabla de propiedades del Álgebra Proposicional (ver Tabla 1)] [CrI]
C: – ¿La que nos dio el Profe? [CP]
B: – Sí, esa.
C: – ¿No lo podemos hacer por Tablas de Verdad? [CoI]
P: – No. En esta ocasión deben hacerlo usando las propiedades de la tabla (ver Tabla 1)
C: – Vaya.
B: – Veamos la tabla … [CrI]
A: – Tenemos que partir de un lado de la doble flecha y llegar al otro lado, [se refiere al operador $\Leftrightarrow$ que indica que su operando izquierdo es lógicamente equivalente al operando derecho] ¿Verdad Profe? [CoI]
P: – Así es.
B: – El Profe nos dijo que normalmente deberíamos empezar del lado más grande, [se refiere a partir del operando del operador $\Leftrightarrow$ con más conectivos] ¿Verdad? [CoI]
P: – Casi siempre es más fácil así.
A: – Entonces [partimos] del lado izquierdo. [Se refiere a la expresión $(p \vee q) \wedge \neg p$]
C: – ¿Y qué propiedad tenemos que aplicar? [CP]
A: – Distributiva [F]
B: – Pero primero Conmutativa. [CrI]
A: – Sí, es cierto. Primero la Conmutativa. [Consciente que sus compañeros necesitan ver paso a paso] Entonces $(p \vee q) \wedge \neg p \Leftrightarrow \neg p \wedge (p \vee q)$. [escribe el primer paso justificado por la propiedad Conmutativa para darle la forma que tiene en la Tabla 1 la propiedad Distributiva]
B: – Ahora sí podemos aplicarle la [propiedad] Distributiva. [CrI]
A: – Sí. [lo escribe, es el segundo paso. Ver Tabla 2, paso 2]
C: – Pero se hizo más grande… [CrI]
A: – Sí, pero aquí podemos aplicar la ley de Negación… y se va a simplificar. [Aplica ley Conmutativa y de Negación, ver Tabla 2, pasos 3 y 4] [F]

B: – ¿Y ahora?
C: – «Cero [Falso] o otra cosa es otra cosa», ¿verdad? [se refiere a la propiedad de Identidad] [CoI]
B: – Sí, ¿pero no hay que darle vuelta? [se refiere a poner la expresión en el orden en que aparece en la Tabla 1, $p \vee 0 \Leftrightarrow p$]. [CrI]
A: – Es cierto, no hace falta darle vuelta. Se puede aplicar así, ¿verdad Profe? [OP]
P: – Exacto, debido a que la disyunción y la conjunción son conmutativas.
B: – Entonces ya estuvo. [lo señala en el papel] [OP]
A: – Ajá, entonces aplicamos Identidad.

**Tabla 2.** *Resumen de Procedimiento del Ejercicio 1.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Paso 1: | $(p \vee q) \wedge \neg p$ | $\Leftrightarrow \neg p \wedge (p \vee q)$ | Conmutativa |
| Paso 2: | | $\Leftrightarrow (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge q)$ | Distributiva |
| Paso 3: | | $\Leftrightarrow (p \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge q)$ | Conmutativa |
| Paso 4: | | $\Leftrightarrow 0 \vee (\neg p \wedge q)$ | De Negación |
| Paso 5: | | $\Leftrightarrow (\neg p \wedge q)$ | Identidad |

Fuente: Navas (2022)

*Ejercicio 2*

B: – Ahora vamos con el [ejercicio] 2.
C: – Los dos lados tienen la misma cantidad de conectivos… [duda de qué lado partir] [CrI]
A: – Comencemos del lado izquierdo.
B: – Entonces Implicación. [lo escriben. Ver Tabla 3, paso 1] [CoI]
C: – ¿Y ahora?
A: – Hay otra implicación. [CoI]
C: – ¿Se puede así? [duda ante el hecho de que el consecuente del resultado del paso 1 en la Tabla 3 no es una proposición simple] [CrI]
B: – Sí, se puede.
C: – ¡Ahh!! [lo escriben, ver Tabla 3, paso 2] [CoI]
A: – ¿Y ahora qué hacemos? [los tres se quedan en silencio un momento] [CoI]
B: – La $r$ tiene que quedar al final, sola. [OP]
A: – Es cierto. [OP]
C: – ¿Distribución? [CP]
P: – No. La distribución es de la disyunción sobre la conjunción, y de la conjunción sobre la disyunción. Y ahí las dos son disyunciones.
B: – Entonces hay que agrupar la $p$ con la $q$. [realizan el paso 3, Tabla 3] [CoI]
P: – Sí, hay que agruparlas, pero deben planificar hacia dónde quieren llegar… y no aplicar las propiedades sólo porque sí.
C: – Yo ya vi eso… [señala el resultado del paso 3, Tabla 3] Está en las de DeMorgan, pero está del lado derecho. [insinúa que no se puede aplicar la propiedad «al revés»] [CrI]
P: – Pero hemos estudiado que las equivalencias lógicas funcionan en ambas direcciones. Así que también podemos sustituir algo que tiene la forma del lado derecho [señalando en la Tabla 1] por su correspondiente del lado izquierdo.
A: – Entonces aplicamos DeMorgan. [realizan el paso 4, Tabla 3] [OP]
B: – Y ahora Implicación otra vez. [lo escriben, ver paso 5, Tabla 3] [CoI]
C: – Ah, ya. [CoI]

***Tabla 3.*** *Resumen de Procedimiento del Ejercicio 2.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Paso 1: | $p \to (q \to r)$ | $\Leftrightarrow p \to (\neg q \vee r)$ | Implicación |
| Paso 2: | | $\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r)$ | Implicación |
| Paso 3: | | $\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r$ | Asociatividad |
| Paso 4: | | $\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee r$ | DeMorgan |
| Paso 5: | | $\Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$ | Implicación |

Fuente: Navas (2022)

### *Ejercicio 3*

A: – Hoy vamos con el tercero. [Dice emocionado]
C: – Con este también comenzamos por el lado izquierdo, ¿verdad? [CoI]
B: – Sí, es más corto. [O sea que tiene menos conectivos] [OP]
A: – Aquí hay que desarmar la implicación. [Se refiere a convertir la implicación en una disyunción]
B: – Ajá.
C: – O sea que aplicamos Implicación, ¿va? [CoI]
A: – Cabal. [Lo escriben, ver paso 1, Tabla 4]
B: – Ahora [hay que aplicar] DeMorgan. [Ver paso 2, Tabla 4]
C: – Ahora sí es para adelante. [Hace el gesto de movimiento hacia la derecha. Se refiere a aplicar la propiedad de izquierda a derecha según la Tabla 1. Parece haber comprendido que pueden aplicarse las propiedades en ambas direcciones] [OP]
P: – Sí.
A: – Ahora distribuimos. [F]
C: – Pero de este lado, ¿va? [Se refiere a que si se aplicará la distribución por el lado derecho. Ver transición del paso 2 al 3, Tabla 4] [OP]
B: – Sí, también se puede. [Señala la Tabla 1 y hace el gesto de movimiento en ambas direcciones con la mano sobre la propiedad Distributiva] [F]
C: – Ajá. [Asiente con la cabeza mientras ve lo que A escribió, el paso 3 de la Tabla 4] Y no importa que tenga negaciones, ¿verdad Profe? [F]
P: – Exacto. Esas [$(\neg p \wedge \neg q)$] podrían ser expresiones compuestas más grandes, o sea, con más conectivos.
B: – ¿Y ahora? Implicación dos veces.
A: – Cabal. [Lo escriben, paso 4 de la Tabla 4]
C: – Y ahora del otro lado. [Se refiere a aplicar la definición de Implicación «al revés» al operando derecho de la conjunción del paso 4, Tabla 4. Es decir, de una disyunción a una implicación]
A: – Exacto. [Escriben el paso 5, Tabla 4]
P: – Muy bien.
A: – Profe. Este último ejercicio [se refiere al enunciado del ejercicio 3] parece una distribución de la implicación [se refiere al operador condicional] sobre el «o» [la disyunción]. [O]
P: – Así es, pero sólo por el lado derecho. Habría que demostrar que también se pueda por el lado izquierdo. En una materia [curso] posterior van a estudiar diferentes álgebras, y algunas de ellas tienen propiedades distributivas sólo por un lado, otras por ambos lados, y otras no tienen operadores con distributividad entre sí.

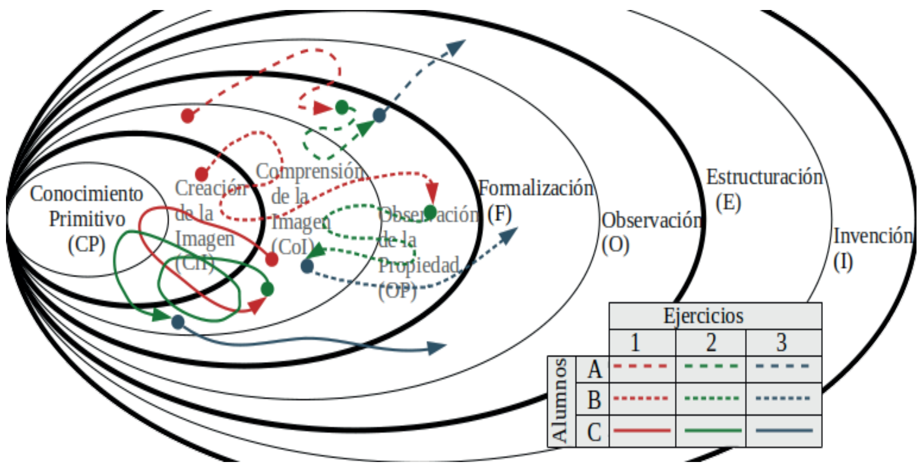
*Tabla 4: Resumen de Procedimiento del Ejercicio 3*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Paso 1: | $(p \vee q) \rightarrow r$ | $\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee r$ | Implicación |
| Paso 2: | | $\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r$ | DeMorgan |
| Paso 3: | | $\Leftrightarrow (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$ | Distribución |
| Paso 4: | | $\Leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (\neg q \vee r)$ | Implicación |
| Paso 5: | | $\Leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ | Implicación |

Fuente: Navas (2022)

En la Figura 3 se presenta el resumen de los avances en los niveles de comprensión de los tres alumnos analizados según el modelo de Pirie y Kieren (1989, 1994) incluyendo los procesos de redoblado.

***Figura 3:** Resultado del análisis de la grabación*




Esta investigación ilustra cómo los alumnos se enfrentan a cuestiones aparentemente muy simples para la resolución de una actividad, como la identificación del procedimiento de solución; cómo han recurrido a sus conocimientos previos sobre las propiedades del álgebra de proposiciones; cómo van aclarando la aplicación de estas propiedades, volviéndose conscientes de que pueden ser aplicadas de diferentes formas, e iniciando la capacidad de formular estrategias de solución.

Los estudiantes han realizado diferentes ejercicios que les han ayudado a crearse una idea matemática del concepto (CrI). Una vez creada esta idea, se pueden liberar de las acciones concretas sin necesidad de recurrir a las propiedades de la Tabla 1 para avanzar en la resolución de la actividad (CoI). Este proceso los lleva a darse cuenta de que los objetos que están manipulando, las proposiciones, tienen ciertas propiedades generalizables (OP) y, finalmente, recurren a algunas generalizaciones para resolver la actividad (F).

En este estudio, se ha constatado que este proceso no es lineal, no se asciende de un nivel de comprensión del conocimiento matemático inferior a otro superior acumulando información. Más bien es una construcción recursiva como indican Pirie y Kieren (1989, 1994) que implica necesariamente uno o más «saltos hacia atrás» (redoblados), a formas más sencillas de conocer los diferentes elementos matemáticos en niveles interiores y que, apoyándose en ellas, se puede seguir avanzando hacia niveles exteriores del modelo en el que el conocimiento se hace más sofisticado y también más consolidado.

Aunque los redoblados puedan parecer un problema cognitivo, en realidad son procesos importantes y necesarios para lograr un avance hacia una forma más consolidada de comprensión matemática, ya que permiten ir «rellenando» y/o complementando aspectos conceptuales y procedimentales que no estaban bien afinados previamente.

Además, se pudo constatar que luego de estos procesos de redoblado, aunque sólo regresaran al mismo nivel, en realidad había ocurrido un aprendizaje, más estable a partir del cual se puede seguir avanzando.

Algunos redoblados fueron más exitosos y efectivos gracias a la confirmación de algunas dudas de los alumnos por parte del profesor, y otros gracias a la seguridad mostrada por alguno de los alumnos más aventajados.

También se observa que en un grupo de trabajo el hecho de que los diferentes miembros alcancen niveles de razonamiento distintos y a diferente ritmo es algo normal (igual que en la tesis de Carmona Correa (2020)), así como que las dudas y los fallos en la comprensión de alguno de los miembros conduzcan a un redoblado hacia niveles inferiores en la compresión del conocimiento, a los que se ven arrastrados otros miembros del grupo.

## Conclusiones

Se encontró que los alumnos transitan un proceso que no es lineal para alcanzar la comprensión. Se observa que es un proceso en el que no se asciende de nivel en nivel acumulando conocimiento o información, y tal como apuntan Pirie y Kieren (1989) es un proceso de naturaleza recursiva, en la que se dan los procesos de Redoblado, que les permite a los alumnos sofisticar y consolidar su conocimiento y sus habilidades.

Es importante en este tipo de actividades, orientar a los alumnos de la manera apropiada para no impedir que los alumnos transiten los redoblados. Tal como ocurrió en la investigación de Codes Valcarce y otros (2013), en general hay que dejar que los alumnos resuelvan por sí mismos algunos conflictos cognitivos y no darles directamente la solución, ya que esto impidió que algunos de sus alumnos realizaran el redoblado exitosamente.

Además, se observó que todos los alumnos vivieron un tránsito a diferente ritmo por los diferentes niveles de comprensión.

Es importante seguir investigando el proceso de comprensión de conceptos fundamentales como las Equivalencias Lógicas, los Argumentos Lógicos sin y con Cuantificadores para mejorar los procesos de enseñanza de algunas herramientas fundamentales de la matemática como lo son las demostraciones formales. Particularmente las equivalencias lógicas tienen sus complicaciones debido a las dificultades cognitivas inherentes de algunas propiedades del álgebra proposicional, como las de DeMorgan (Macbeth, Sosa y Genovese, 2010).

Coincidimos con Pirie y Kieren (1989) en que estudiar la comprensión de un concepto por parte de los estudiantes es un proceso muy dificultoso y difícil de generalizar debido a que son necesarias las entrevistas (y no sólo los exámenes tradicionales) para poder descubrir la cambiante comprensión de los alumnos.

## Referencias bibliográficas

Alfaro Carbajal, C., Flores Martínez, P., y Valverde Soto, G. (2019). El conocimiento de la práctica matemática sobre las demostraciones en profesores de matemática en formación inicial. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 32*(1), 497–504.

Angulo Vergara, M. L., Arteaga Valdés, E. y Carmenates Barrios, O. A. (2020). La formación de conceptos matemáticos en el proceso de enseñanza- aprendizaje de la Matemática. *Revista Conrado, 16*(74), 298–305.

Carmona Correa, M. C. (2020). *La enseñanza del concepto de paralelismo y perpendicularidad mediante la implementación de un proyecto de aula*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Nacional de Colombia. Medellín, Colombia. Descargado de https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/78753.

Codes Valcarce, M., Delgado Martín, M. L., González Astudillo, M. T. y Monterrubio Pérez, M. C. (2013). Comprensión del concepto de serie numérica a través del modelo de Pirie y Kieren. *Enseñanza de las Ciencias, 31*(3), 135–154.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed), Advanced Mathematical Thinking (pp. 153–166). Dordrecht: Kluwer.

Delgado Martín, M. L., Codes Valcarce, M., Monterrubio Pérez, M. C., y González Astudillo, M. T. (2014). El concepto de serie numérica. Un estudio a través del modelo de Pirie y Kieren centrado en el mecanismo "folding back". *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (6), 25–44.

Dubinsky, E. (1991). Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics. En: Steffe L.P. (eds), *Epistemological Foundations of Mathematical Experience. Recent Research in Psychology*. Springer, New York, NY. doi: 10.1007/978-1-4612-3178-3_9

Dubinsky, E., Mcdonald, M. A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. En: Holton D., Artigue M., Kirchgräber U., Hillel J., Niss M., Schoenfeld A. (eds), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*. New ICMI Study Series, vol 7. Springer, Dordrecht. doi: 10.1007/0-306-47231-7_25

Gallardo Romero, J. (2004). *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.* Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Málaga. Málaga, España.

Kaput, J. J. (1985). Representation and problem solving: Methodological issues related to modeling. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. *381*–398). Hillsdale, NJ: Erlbaum. doi: 10.4324/9780203063545-30

Macbeth, G., Sosa, R. A., y Genovese, I. E. (2010). Asimetría cognitiva de las leyes de DeMorgan. *Calidad de Vida y Salud, 3*(2), 71-81.

Martin L. C. (2008). Folding back and the dynamical growth of mathematical understanding: Elaborating the Pirie–Kieren Theory. *The Journal of Mathematical Behavior, 27*(1), 64-85. doi: 10.1016/j.jmathb.2008.04.001.

Meel, D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 6*(3), 221-278.

Pirie, S. E. B. y Kieren, T. E. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the Learning of Mathematics, 9*(3), 7–11.

Pirie, S. E. B. y Kieren, T. E. (1990). A recursive theory of mathematical understanding: some elements and implications. *Annual Meeting of the American Educational Research Association* (Boston, Massachusetts).

Pirie, S. E. B. y Kieren, T. E. (1992). Watching Sandy's understanding grow. *The Journal of Mathematical Behavior, 11*(3), 243–257.

Pirie, S. E. B. y Kieren, T. E. (1994). Growth in Mathematical Understanding: How Can We Characterise It and How Can We Represent It?. En P. Cobb (Ed.), *Learning Mathematics* (pp. 61–86). Springer, Dordrecht. doi: 10.1007/978-94-017-2057-1_3.

Plazas Alvarado, J. R. (2020). La comprensión en trigonometría en el marco de la teoría de Pirie y Kieren. Universidad de Los Andes, Colombia. Descargado de http://funes.uniandes.edu.co/22723/1/Plazas2020Comprension.pdf

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, *22*(1), 1-36. doi: 10.1007/BF00302715

Sierpińska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics,* 18, 371–397. doi: 10.1007/BF00240986

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12, 151–169. doi: 10.1007/BF00305619

Villa Ochoa, J. A. (2011). *La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada: un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren.* Tesis de Doctorado no publicada. Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia. Descargado de http://hdl.handle.net/10495/16849.

Vinner, S. (1983). Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305. doi: 10.1080/0020739830140305.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed), Advanced Mathematical Thinking (pp. 65–81). Dordrecht: Kluwer.