Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 35, NÚMERO 1, AÑO 2022

ASPECTOS COGNITIVOS QUE EVIDENCIAN ESTUDIANTES DE TERCERO DE PRIMARIA EN LA GENERALIZACIÓN DE PATRONES FIGURALES

COGNITIVE ASPECTS SHOWED BY THIRD-GRADE PRIMARY SCHOOL STUDENTS IN THE GENERALIZATION OF FIGURAL PATTERNS

Reinaldo Montoya-Ditta, Guadalupe Cabañas-Sánchez
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
rmontoya@uagro.mx, gcabanas@uagro.mx

Resumen
El estudio describe aspectos cognitivos que evidencian dos estudiantes de tercer grado de primaria (8 a 9 años) al responder preguntas de generalización cercana y lejana, en una tarea de generalización de patrones figurales asociados a una sucesión lineal. Estos estudiantes no habían sido instruidos previamente, en el estudio de la generalización de patrones lineales. Los resultados muestran que los procesos cognitivos de los estudiantes se articularon a las formas de percibir los patrones figurales, que evolucionó de la sensorial a la cognitiva. De esa evolución, construyeron tanto una regla local como una directa. Conectaron significados, propiedades y conceptos matemáticos, según su nivel de abstracción, haciendo uso del lenguaje.

Palabras clave: generalización, patrón figural, aspectos cognitivos.

Abstract
The study describes cognitive aspects showed by two third-grade primary school students (8 - 9 years old) when answering near and far generalization questions in a generalization task of figural patterns linked to a linear sequence. These students had not received previous instruction in the study of lineal generalization patterns. The findings indicate that students' cognitive processes were connected to the ways to perceive the figural patterns, which evolved from the sensory to the cognitive process. From this evolution, they built both a local and a direct rule. They connected mathematical meanings, properties and concepts, according to their level of abstraction, making use of language.

Keywords: generalization, figural pattern, cognitive aspects

Antecedentes y problema de investigación

La generalización es una herramienta útil, poderosa y una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela (Mason, 1999; Stacey, 1989). En Educación Matemática ha sido objeto de estudio desde diferentes enfoques y contextos. En matemáticas, destacan las aportaciones de Pólya (1966) y Krutetskii (1976). Pólya (1966), la considera como "el paso de la consideración de una serie determinada de objetos a la de una serie mayor que contenga a la primera" (p. 37). Krutetskii (1976), por su parte, como la habilidad para generar conocimiento matemático (objetos, relaciones y operaciones) y distingue dos niveles: la habilidad personal para ver lo general y conocido en lo que es particular y concreto, y la habilidad para ver algo general y todavía desconocido en lo que es particular y aislado. En el ámbito curricular, organizaciones internacionales como el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) en Estados Unidos y en Australia, el Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (2015), demandan la inclusión del álgebra en el currículo de primaria más allá de la manipulación simbólica que se prioriza en secundaria, debido a que los estudiantes necesitan, primero, comprender los conceptos, las estructuras y los principios que rigen la manipulación de los símbolos, y cómo pueden usarse estos para registrar ideas y ampliar la comprensión de las situaciones (NCTM, 2000, p. 39). Esta demanda internacional (Aké, 2013), vigente, se puede atender vía la generalización, por ser una herramienta útil para introducir aspectos algebraicos desde primaria. En México, también se reconoce la importancia del estudio del álgebra desde nivel básico (e.g., SEP, 2011; SEP, 2011a). Si bien sólo aparece implícita en documentos oficiales, como el plan y programas de matemáticas, si se reconoce en los libros de texto gratuito para el profesor y el estudiante en básica (Cabañas-Sánchez, et al., 2017).

La investigación ha documentado lo que hacen o dejan de hacer estudiantes de diferentes niveles escolares al trabajar con patrones figurales lineales principalmente (e.g., Carraher y Schliemann, 2007; Dörfler, 2007; Rivera, 2013), pocos con profesores en formación (e.g., Barbosa y Vale, 2015; Kirwan, 2015). Se reconoce, además, a la visualización como fundamental en la construcción de estructuras matemáticas plausibles que expliquen el comportamiento de patrones en cualesquiera de sus etapas (e.g., Nilsson y Juter, 2011; Rivera, 2010). Rivera (2010) por ejemplo, documentó la existencia de "plantillas" visuales en la generalización de patrones y tipos de generalización algebraica construidas por los estudiantes a partir de razonamientos aditivos y multiplicativos. Se identifican tres tendencias en este tipo de estudios. La primera, refiere a la identificación de estrategias y/o formas de uso, de las estructuras o formas de proceder en el proceso de generalización (e.g., Rivera y Becker, 2008; Rivera, 2018; Cetina-Vázquez y Cabañas-Sánchez, 2022). Una segunda, explora y desarrolla formas de razonamientos, en específico el inductivo (en estudiante o bien profesores), por la misma naturaleza de la generalización (Cañadas, 2007; Cañadas y Figueiras, 2011; Rivera, 2013) o sobre las formas de aprehensión cognitiva que muestran al resolver problemas de generalización (Callejo, et al., 2019). Una tercera tendencia, son estudios teórico-empíricos, que establecen modelos teóricos sobre procesos de generalización, categorías de estrategias y/o factores que parecen incidir en su uso (e.g., Stacey, 1989; Lannin, et al., 2006; Rivera, 2013; Kirwan, 2015).

Desde lo curricular y la investigación se reconoce la importancia de la generalización en la construcción de conocimiento matemático. Sin embargo, poco se sabe de investigaciones con estudiantes mexicanos, que enfaticen en aspectos cognitivos que articulen tanto a las estrategias como a los tipos de razonamientos que evidencia al resolver tareas de generalización de patrones lineales. La presente investigación se orienta en esa dirección, nos preguntamos *¿Qué aspectos cognitivos evidencian niños de primaria, en tareas que demandan la generalización de patrones figurales asociados a una sucesión lineal?* Para responder a la cuestión, nos propusimos *describir los aspectos cognitivos que movilizan niños de primaria, al resolver tareas de generalización de patrones figurales.*

Para el logro del objetivo, nos planteamos dos objetivos específicos:
O.E.1: *Examinar los tipos de razonamientos y representaciones que movilizan estudiantes de primaria al resolver tareas que demandan la generalización de patrones.*
O.E.2: *Identificar qué estrategias movilizan estudiantes de primaria en el desarrollo de estructuras matemáticas y la generalización de patrones figurales.*

Marco conceptual

Percepción

Entendemos a la percepción en el sentido de Seel (2012), como: el proceso mediante el cual la información del entorno es detectada por los sentidos y transformada en una experiencia significativa en el cerebro. Una búsqueda dinámica de patrones útiles en lugar de una grabación pasiva, la percepción es una interpretación de eventos, que involucra la ruptura de datos sensoriales y el ensamblaje de información tanto a nivel consciente como inconsciente.

Rivera y Becker (2008) reconocen que en tareas de patrones que involucran señales figurativas, entre los tipos de percepciones, la que importa es la percepción visual. Las describen basados de la postura de Dretske (1990), a la que se adhiere esta investigación.

La percepción sensorial (u objeto) es cuando los individuos ven un objeto como un mero objeto en sí mismo. La percepción cognitiva va más allá de lo sensorial cuando los individuos ven o reconocen un hecho o una propiedad en relación con el objeto (Rivera y Becker, 2008).

En ese contexto, afirman que, los niños pequeños que ven grupos consecutivos de señales figurativas, como meros conjuntos de objetos, exhiben percepción sensorial. Sin embargo, cuando reconocen que las señales tomadas en conjunto forman en realidad una secuencia de patrones de objetos, manifiestan una percepción cognitiva. La percepción cognitiva desde esta perspectiva, requiere el uso de procesos conceptuales y otros procesos cognitivos, que permita a los estudiantes articular lo que eligen reconocer como un hecho o una propiedad de un objeto estudiado. Está mediado de otros tipos de conocimiento visual que inciden en el objeto, y estos tipos pueden ser de naturaleza cognitiva o sensorial.

Estrategias

Por estrategia se atiende a la forma de proceder y la ruta que siguen para construir la generalización o una estructura matemática. Rico (1997) la define como “Cualquier **procedimiento** o **regla** de acción que permite obtener una conclusión o responder a una haciendo uso de relaciones y conceptos, generales o específicos de una determinada estructura conceptual” (p.33). Se enfatiza en el análisis tanto de estrategias, así como de los enfoques de razonamiento, que la investigación ha reportado en lo que respecta a la generalización de patrones que las estrategias desarrolladas por los participantes se centran en lo numérico y figural (Becker y Rivera, 2005; Jurdak y El Mouhayar, 2014; Stacey, 1989).

Razonamiento

El razonamiento es un proceso del pensamiento, en el que a partir de una o varias premisas, se extraen conclusiones (Castro et al., 2010). Se estudian tres tipos de razonamiento:

a) *Razonamiento inductivo.* Es el proceso de generar una inferencia viable a partir de una base de conocimiento incompleto (Rivera y Becker, 2007).
b) *Razonamiento abductivo.* Proceso cognitivo que parte de hechos sorprendentes que demandan explicación, del que se obtiene o adopta una conclusión.
c) *Razonamiento deductivo.* Proceso de inferencia de conclusión de premisas, basadas en reglas propias de la lógica formal, se obtienen de casos generales a casos particulares.

Patrón y generalización

Varios autores han destacado la importancia de incorporar el estudio de patrones desde edades tempranas. Un patrón, en el dominio de las matemáticas, en palabras de Mulligan y Milchelmore (2009), es “cualquier regularidad que usualmente involucra relaciones numéricas, espaciales o lógicas” (p.34).

La *generalización* es un aspecto fundamental en las matemáticas, ya que reside en el corazón de esta (Mason, 1999). Desde el punto de vista cognitivo, “es un atributo común del pensamiento humano” (Radford, 2018, p. 7). Kaput (1999, p. 136) define generalizar como:

> […] extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificar y exponer explícitamente lo común entre los casos, o elevando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco ya no está en los casos o situaciones mismos, sino en los patrones, procedimientos, estructuras y las relaciones entre ellos.

Tipos de generalizaciones en patrones figurales

Rivera (2010), destaca dos formas básicas, algebraicas de desarrollar una generalización de patrones, atendiendo tanto a la estructura matemática como a la manera en que organizan los objetos:

a) *Generalización constructiva:* La construyen a partir de etapas dadas en un patrón figural, de percibir cognitivamente las figuras de manera independiente, es decir, en partes no superpuestas que, cuando se suman, forman la figura percibida que se aplica a través de las etapas del patrón.
b) *Generalización deconstructiva:* La construyen a partir la percepción cognitiva de figuras en etapas conocidas, como superpuestas o por partes. Ven las etapas figurales conocidas en un patrón como sub-configuraciones superpuestas que se pueden descomponer de manera bastante conveniente.

Representaciones y tipos

El concepto de representación se asume desde la postura de Lupiáñez (2016) quien las define en el ámbito de las matemáticas como “aquellas notaciones simbólicas o gráficas, o bien expresiones verbales, mediante las que se hacen presentes y se nombran los conceptos y procedimientos en esta disciplina, así como sus características, propiedades y relaciones más relevantes” (p. 120). Las representaciones pueden organizarse según sus características y propiedades en diferentes sistemas de representación. Reconoce dos grandes familias, las simbólicas y las gráficas. Las *simbólicas,* incluyen símbolos alfanuméricos que se emplean con unas reglas de procedimiento y, las *gráficas* que son de tipo figurativo y disponen de unas reglas de composición y de unos convenios de interpretación. Considerando estos dos tipos de representación y el concepto objeto de estudio, pueden surgir otros sistemas de representación que expresan diferentes facetas del mismo, así como sus significados. Entre los tipos de representación destacan:

Simbólica. Son aquellas de carácter alfanumérico, cuya sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas de procedimiento (Rico, 2009, p. 8). Se distinguen dentro de las representaciones simbólicas dos tipos: numéricas y algebraicas.

Numérica. Se sirven de números y operaciones expresadas mediante lenguaje matemático que suelen organizarse para realizar un cálculo.

Algebraica. Se caracterizan por el uso del simbolismo algebraico para expresar un enunciado o generalizar las operaciones aritméticas. Suponen un mayor grado de abstracción.

*Pictórica***.** Se utiliza un sistema de representación visual, por lo general un dibujo, para plantear las relaciones entre datos e incógnitas de la tarea, sin ninguna notación que pueda considerarse de carácter simbólico (Cañadas y Figueiras, 2011).

*Tabular***.** Es aquella en la que los estudiantes se valen de una tabla de datos para la organización y representación de cantidades numéricas, expresiones verbales, o relaciones entre elementos de la tarea.

Verbal. Se sirven del lenguaje natural (oral y escrito) para exponer la información de forma cohesionada. En el caso de los protocolos que llevan a cabo los estudiantes al resolver una tarea, permiten expresar el proceso de razonamiento de forma secuencial (Cañadas y Figueiras, 2011).

*Gestual***.** Forma de expresar una generalidad mediante movimientos corporales repetitivos al trabajar con tareas que demandan la generalización de patrones figurales.
Múltiples. Son aquellas que resultan de la combinación de dos o más sistemas de representación.

Metodología

Se diseñó e implementó un experimento de enseñanza (Steffe y Thompson, 2000), con el fin de desarrollar la habilidad de generalizar, en estudiantes de tercer grado de primaria, a través de tareas de generalización de patrones figurales lineales, cuya expresión algebraica general es de la forma $f(n) = an + b$, con $b \neq 0$.

Experimento de enseñanza y entrevistas

En el marco del experimento de enseñanza (ExpE) se diseñaron tres tareas (T) de generalización, que desafiaron a los estudiantes a construir una estructura matemática plausible que explique el comportamiento de patrones figurales, en cualesquiera de sus etapas. El ExpE se desarrolló en tres sesiones de 60 minutos aproximadamente. Cada una abordó una tarea. Los estudiantes trabajaron individualmente con T, al final fueron entrevistados a fin de profundizar en sus formas de proceder y de acción. Se les motivó a explicar a toda la clase, apoyados de la pizarra, sus procedimientos y a responder preguntas de sus compañeros. Para fines del artículo se discuten resultados en T1.

Participantes

Participaron 22 estudiantes (13 mujeres y 9 hombres) de tercer grado de una escuela primaria, quienes al momento del estudio no habían recibido ninguna preparación en la resolución de tareas de generalización de patrones. Su participación se dio a partir de las facilidades otorgadas por la institución y de su habilidad en la comprensión lectora y los significados de la suma y la multiplicación, y la asistencia a las tres sesiones en que se trabajaron las tareas.

Tarea 1

Esta tarea se constituye de un patrón figural creciente (tomada de Montoya-Ditta, 2019), cuya regla algebraica asociada es: $S_n = 2n + 2$

Figura 1. *Tarea 1 "Las mesitas".*

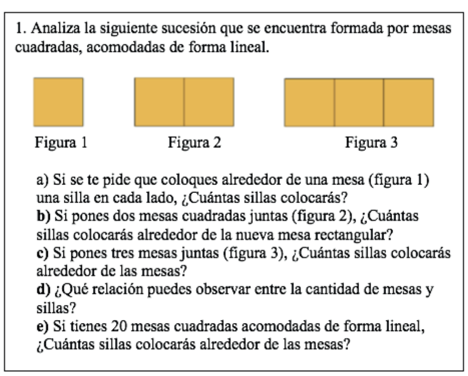

1. Analiza la siguiente sucesión que se encuentra formada por mesas cuadradas, acomodadas de forma lineal.

Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) Si se te pide que coloques alrededor de una mesa (figura 1) una silla en cada lado, ¿Cuántas sillas colocarás?
b) Si pones dos mesas cuadradas juntas (figura 2), ¿Cuántas sillas colocarás alrededor de la nueva mesa rectangular?
c) Si pones tres mesas juntas (figura 3), ¿Cuántas sillas colocarás alrededor de las mesas?
d) ¿Qué relación puedes observar entre la cantidad de mesas y sillas?
e) Si tienes 20 mesas cuadradas acomodadas de forma lineal, ¿Cuántas sillas colocarás alrededor de las mesas?

Nota: La figura muestra una tarea plateada a estudiantes de primaria tercer grado de primaria. Fuente: Montoya-Ditta, (2019, p. 216).

El ExpE fue guiado por el primer autor de este documento, asumiendo el rol de profesor-investigador.

Análisis de datos

El análisis de los datos consideró las producciones escritas y verbales que presentaron tanto en el ambiente de papel y lápiz como en la entrevista durante el ExpE, a fin de reconocer las formas de proceder de los estudiantes y triangular esta información con las categorías de estrategias que la investigación ha documentado (Stacey, 1989; Lannin et al., 2006; Jurdak y El Mouhayar, 2014) en el marco de la generalización de patrones e identificar en ese proceso, tipos de razonamientos. Las formas de proceder, así como los tipos de razonamientos, se analizaron con las formas de percepción que los estudiantes mostraron a lo largo del ExpE.

Discusión de resultados

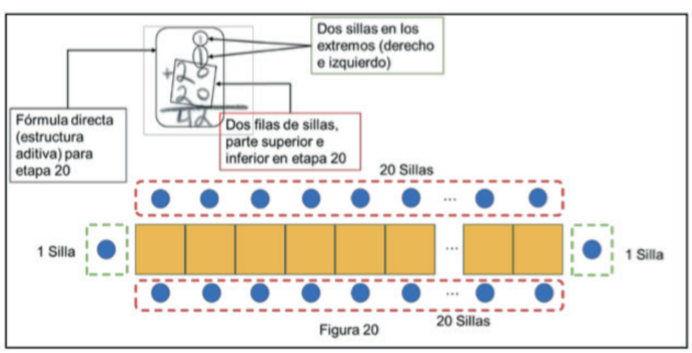
Aspectos cognitivos desarrollados por estudiantes que generalizaron

Se ejemplifica mediante los procesos desarrollados por los estudiantes (E) 4 y 12 en T1.

Estudiante 4

E4 movilizó diferentes procesos cognitivos. Primero, se observó su paso por un proceso de percepción sensorial, al percibir formas rectangulares de la unión de las mesas cuadradas. Luego se ubicó a trabajar sobre el contorno y analizó partes de las figuras. De ello, identificó la relación entre las variables figura y sillas. En las tres primeras etapas se apoyó del conteo, manifestando así el inicio de un pensamiento aditivo. En la etapa 20, explicita este pensamiento, a través de una estructura matemática que explica de manera adecuada el comportamiento del patrón figural. La estructura es de la forma: $Sn = n + n + 1 + 1$, de tipo deconstructiva aditiva (Figura 2). Recurrió al profesor-investigador para explicar y validar esta estructura, que, por alguna razón, no mantuvo al trabajar en otras etapas, aun con este acompañamiento. La estructura que mantuvo hasta el final es de la forma: $Sn = 2n$, la que se constituyó en una regla directa, aunque no así en la regla general que explica el comportamiento del patrón. Los procesos inferenciales de abducción, inducción y deducción fueron fundamentales en la generalización del patrón en E4, quien manifestó dos estructuras, una multiplicativa y otra aditiva.

Figura 2. *E4 percibió el patrón figural por medio de la estructura aditiva en la etapa 20.*

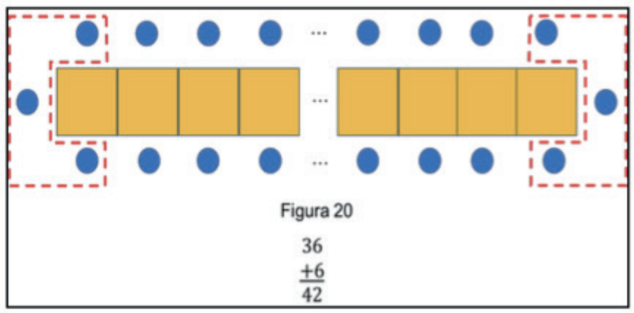


Fuente: Creación propia.

Estudiante 12

Se reconocieron procesos cognitivos diferentes en E12. Al inicio su percepción fue sensorial, de percibir formas rectangulares al fijarse en el contorno formado por las mesas unidas. Siguió un proceso cognitivo al coordinar significados, propiedades y representaciones, para inferir explicaciones. En etapas lejanas dirigió su atención a los pares de sillas que visualizó, los que sumó inicialmente, luego se apoyó de la multiplicación. Infirió una regla directa (o conjetura) verdadera, que expresó a través de dos estructuras multiplicativas distintas (o generalizaciones), una de tipo constructiva, la otra deconstructiva. Siguió un proceso abductivo para reconocerlas y las validó inductivamente en etapas cercanas. La generalización fue deconstructiva, la construyó guiado por el profesor, y quedó a nivel de regla directa. Manifestó un razonamiento deductivo, al cuestionarle por el número de sillas en etapas lejanas no consecutivas, superior a la etapa 20. Aquí, se apoyó de la generalización tipo constructiva, para determinar el número de sillas que se le demandó. Estableció nuevas conclusiones, verdaderas, a partir de otra también verdadera. La figura siguiente reconstruye la fórmula directa de E12 en la etapa 20.

Figura 3. *Forma de proceder desde lo figural de la regla directa para caso 2 de E12. Etapa 20.*



Fuente: Creación propia.

Los procesos abductivos, inductivos y deductivos fueron fundamentales en la generalización del patrón. Manifestó dos estructuras multiplicativas diferentes, ambas equivalentes y válidas, que se corresponden con la cantidad de mesas en relación con el número de etapa.

Estructuras matemáticas plausibles

Los estudiantes que generalizaron, establecieron distintas conjeturas o reglas directas relacionadas con la manera de percibir el patrón figural. Las estrategias que evidenciaron en su forma de proceder fueron la de *conteo a partir de una figura* (Stacey, 1983)*,* la *recursiva* y la *funcional* (El Mouhayar y Jourdak, 2016). La primera, la usaron para contar la variable silla en cada figura en las etapas dadas. La recursiva, cuando identificaron cuánto crece de una etapa a otra el número de sillas, usaron ese término o patrón recursivo, para determinar el número de sillas en etapas siguientes. La estrategia funcional, se identificó cuando relacionaron parte del patrón con el valor de la posición de la figura.

Los estudiantes que generalizaron, al inicio mostraron una forma de proceder similar como aquellos que no generalizaron. En su evolución, los primeros fueron capaces de percibir propiedades y características y relacionarlo con lo que visualmente percibían y así, transitar a una regla directa para explicar de mejor forma el comportamiento del patrón figural en etapas cercanas y lejanas.

Conclusiones

Los procesos cognitivos desarrollados por los estudiantes se conectaron a las formas en que percibieron los patrones figurales y procesos inferenciales que siguieron. Esto es, evolucionaron en las formas de percibir los patrones, que pasó de la sensorial a la cognitiva que desde la postura conceptual de Dretske (1990), ambas caracterizan a la percepción visual. Esta evolución se reconoció tanto en los que construyeron una regla local como una directa, ya que conectaron significados, propiedades y conceptos matemáticos, atendiendo a su nivel de abstracción, apoyados del lenguaje común.

La percepción sensorial se evidencia al momento en que los estudiantes, al involucrarse en el análisis de patrones figurales, ven grupos consecutivos de señales figurativas como meros conjuntos de objetos. Así, al trabajar en las sucesiones de patrones figurales asociadas a las tareas, al principio, trabajaron sobre las formas que reconocieron de las figuras de las etapas dadas. Percibieron así, meros objetos o formas geométricas.

La percepción cognitiva se articuló a los significados de la suma y la multiplicación, a nociones de perímetro y área, implícitas en sus diversas formas de proceder. Identificaron y justificaron un patrón creciente y cuánto crece, lo que derivó en una conjetura, que infieren de razonar abductivamente al trabajar y organizar las etapas dadas (o casos particulares). Probaron su conjetura mediante un razonamiento inductivo, estableciendo así una regla local, articulada a la relación de recurrencia. Los estudiantes cuyo razonamiento evolucionó de la relación de recurrencia al de correspondencia, fueron quienes construyeron y justificaron una estructura matemática plausible con la cual explicaron el comportamiento que siguió el patrón figural asociado en las tareas, en cualesquiera de sus etapas.

Se identificaron tres tipos de estrategias: conteo a partir de una figura, recursiva y funcional. Los tipos de generalización, las estructuras y los sistemas de representación manifestados por los estudiantes, dan cuenta de su evolución en la forma de percibir los objetos, así como de un mayor nivel de abstracción, al construir y justificar una estructura matemática, haciendo uso del lenguaje verbal-escrito y del simbólico. Se identificaron dos tipos de generalización, la constructiva y la deconstructiva. Asimismo, dos tipos de estructuras, una de tipo aditiva y otra, multiplicativa, asociadas a su nivel de abstracción. Sobre el tipo de representación empleados en los procesos de razonamiento en la resolución de las tareas, destacan el verbal-escrito, el simbólico- numérico y el pictórico (o figural). Su uso, se articula a la forma de percibir visualmente el patrón figural.

La visualización jugó un papel importante en la generalización de patrones en esta investigación. Se articuló al modo de percibir (sensorial y cognitiva) el patrón, así como a las estrategias y las estructuras que establecieron en el proceso de generalización y que describen el comportamiento de la sucesión lineal asociada al patrón figural.

Referencias bibliográficas

Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación.* (Tesis doctoral), Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, Granada, España.

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority. (2015). *Mathematics: Sequence of content F-6 strand: Number and algebra.* Sydney, Australia.

Barbosa, A., & Vale, I. (2015). Visualization in pattern generalization: Potential and Challenges. *Journal of the European Teacher Education Network, 10*, 57-70.

Becker, J., & Rivera, F. (2005). Generalization Strategies of Beginning High School Algebra Students. En H. Chick, & J. Vincent (Edits.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 4, págs. 121-128). Melbourne: University of Melbourne.

Cabañas-Sánchez, G., Salazar, V., & Nolasco-Hesiquio, H. (2017). Tareas que potencian el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en libros de texto de matemáticas de primaria. En J. Cuevas, & L. Aké (Ed.), *Pensamiento algebraico en México desde diferentes enfoques.*

Callejo, M., Fernández, C., & García-Reche, Á. (2019). Cognitive apprehension in visual pattern generalization problems. *Journal for the Study of Education and Development, 42*(4), 783-828.

Cañadas, M. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas.* (Tesis Doctoral), Universidad de Granada, Granada, España.

Cañadas, M., & Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y aprendizaje, 34*(4).

Carraher, D., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, págs. 669–705). Charlotte, NC: Information Age.

Castro, E., Cañadas, M., & Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO*, 55-67.

Cetina-Vázquez, M., & Cabañas-Sánchez, G. (2022). Estrategias de generalización de patrones y sus diferentes formas de uso en quinto grado. *Enseñanza de las Ciencias, 40*(1), 65-86.

Dörfler, W. (2007). En route from patterns to algebra: comments and reflections. *ZDM Mathematics Education*, 143–160.

Dretske, F. (1990). Seeing, believing, and knowing. En D. Osherson, S. Kosslyn, & J. Hollerback (Edits.), *Visual cognition and action: An invitation to cognitive science* (págs. 129–148). Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

Jurdak, M., & El Mouhayar, R. (2014). Trends in the development of student level of reasoning in pattern generalization tasks across grade level. *Education Studies Mathematical, 85*, 75–92.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema, & T. Romberg (Edits.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (págs. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kirwan, J. (2015). *Preservice secondary mathematics teachers' knowledge of generalization and justification on geometric-numerical patterning tasks.* (Tesis doctoral), Illinois State University, Normal.

Krutetskii, V. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* (J. Kilpatrick, I. Wirszup, Edits., & J. Teller, Trad.) Chicago: Chicago University Press.

Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. (2006). Algebraic Generalisation Strategies: Factors Influencing Student Strategy Selection. *Mathematics Education Research Journal*, 3-28.

Lupiáñez, J. (2016). Sistemas de representación. En L. Rico, & A. Moreno (Edits.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (págs. 119-136). Granada, España: Pirámide.

Mason, J. (1999). Incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: Las secuencias de Tunja. *Revista EMA*, 232-246.

El Mouhayar, R., & Jurdak, M. (2016). Variation of student numerical and figural reasoning approaches by pattern generalization type, strategy use and grade level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(2), 197-215.

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, 33-49.

National Council of Teachers of Mathematics . (2000). *Principles and standards for school mathematics.* USA: NCTM.

Nilsson, P., & Juter, K. (2011). Flexibility and coordination among acts of visualization and analysis in a pattern generalization activity. *The Journal of Mathematical Behavior*, 194-205.

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible.* (J. Abellan, Trad.) Madrid: Editorial Tecnos.

Radford, L. (2018). The Emergence of Symbolic Algebraic Thinking in Primary School. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (págs. 3-25). New York: Springer.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, . . . M. Socas (Edits.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (págs. 15-38). Madrid: Ice-Horsori.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Rivera, F. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, 297-328.

Rivera, F. (2013). *Teaching and Learning Patterns in School Mathematics.* Dordrecht: Springer.

Rivera, F. (2018). Pattern Generalization Processing of Elementary Students: Cognitive Factors Affecting the Development of Exact Mathematical Structures. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 1-31.

Rivera, F., & Becker, J. (2007). Abduction-Induction (Generalization) Processes of Elementary Majors on Figural Patterns in Algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*, 140-155.

Rivera, F., & Becker, J. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM*, 65–82.

Seel, N. M. (2012). *Encyclopedia of the Sciences of Learning.* New York: Springer US.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20(2)*, 147-164.

SEP. (2011). *Plan de estudios 2011. Educación básica.* México: SEP.

SEP. (2011a). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria. Matemáticas. Primer grado.* México: SEP.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics* , 147-164.

Steffe, L., & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential. En R. Lesh, & A. Kelly (Edits.), *Research design in mathematics and science education* (págs. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.