

ANÁLISIS DE UNA SECUENCIA DE ACTIVIDADES DE FRACCIONES COMO ESCENARIO PARA ESTUDIAR EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

ANALYSIS OF A FRACTION ACTIVITY SEQUENCE AS A SCENARIO FOR STUDYING THE SPECIALIZED KNOWLEDGE OF THE MATH TEACHER

Julián Andrés Meléndez Cruz, Eric Flores Medrano

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. (México), Universidad Complutense de Madrid.
(España)

julian.melendezc@alumno.buap.mx, erflores@ucm.es

Resumen:

En este trabajo se estudia el conocimiento especializado del profesor de matemáticas al momento de analizar una secuencia de actividades, en las que se pretende enseñar fracciones a estudiantes de grado quinto de primaria. Para el estudio se utilizó el modelo del conocimiento especializado de profesor de matemáticas, el cual permite analizar, reflexionar y estudiar que sucede con el conocimiento que está movilizando el profesor de matemáticas al momento de pensar en actividades de instrucción matemática. Se adoptó un método de corte cualitativo, particularmente un estudio de caso de tipo instrumental. Finalmente se lograron evidenciar hallazgos importantes relacionados con el conocimiento matemático y didáctico alrededor de las fracciones.

Palabras clave: conocimiento especializado del profesor de matemáticas; fracciones, regletas de cuisenaire

Abstract:

This paper studies the specialized knowledge of the mathematics teacher at the moment of analyzing a sequence of activities in which the intention is to teach fractions to fifth grade elementary school students. For the study, the mathematics teacher's specialized knowledge model was used, which allows analyzing, reflecting and studying what happens with the knowledge that the mathematics teacher is mobilizing at the moment of thinking about mathematics instruction activities. A qualitative method was adopted, particularly a case study of instrumental type. Finally, important findings related to mathematical and didactic knowledge about fractions were evidenced.

Keywords: specialized knowledge of the mathematics teacher; fractions, cuisenaire's rulers

■ Introducción

El centro de atención de este trabajo es el conocimiento del profesor de matemáticas, el cual ha sido objeto de interés para la comunidad educativa en el campo de la educación matemática durante las últimas décadas. Diversos autores en este campo han decidido estudiar qué sucede con el conocimiento que movilizan los docentes de matemáticas al momento de incursionar en escenarios dirigidos hacia la enseñanza y aprendizaje de esta área. Por mencionar algunos autores, encontramos las investigaciones desarrolladas por Shulman (1986), Ball et al, (2008), Godino (2009), entre otros, estas investigaciones han ido haciendo aportes teóricos y metodológicos para estudiar aquel conocimiento que hace especialista al docente de matemáticas.

Para el caso de este trabajo nos centramos en uno de los aportes más actuales en este campo, este es el propuesto por Carrillo et al, (2018). En dicha investigación proponen el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés) como herramienta para analizar, estudiar y caracterizar el conocimiento que moviliza el profesor de matemáticas. Se ha utilizado para estudiar diversos escenarios que vinculan al profesor en la enseñanza y aprendizaje de esta área, tales como las planeaciones de clases, el diseño de actividades, el abordaje de un tema durante determinado tiempo, entre otros.

En esta investigación utilizamos el modelo para estudiar un escenario diferente, nos centramos en analizar cuál es el conocimiento que emerge al momento en el que un grupo de profesores analizan una secuencia de actividades diseñada por los investigadores. Consideramos importante que los docentes a partir de su formación y experiencia pudieran analizar cada una de las tareas presentes en dicha secuencia. En esta, nos interesamos en abordar el concepto de fracción, pues de acuerdo con la literatura asociada, resulta ser uno de temas de mayor complejidad en los primeros grados de escolaridad en la educación básica (Rojas et al, 2015).

De acuerdo con lo anterior, la problemática de este trabajo se plantea desde dos perspectivas, por un lado, la necesidad de contribuir en investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del concepto de fracción, pues autores como (e.g. Ruiz, 2013; Fandiño, 2015) plantean que es uno de los conceptos de mayor complejidad en los primeros grados de escolaridad, debido a los múltiples significados que posee tal concepto. Por otro lado, el problema está relacionado con el conocimiento que el profesor de matemáticas debe movilizar en relación con los conceptos abordados, en este caso, la necesidad de conocer las diferentes nociones, conceptos, significados, entre otros, relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones.

Para atender el problema mencionado se hace necesario buscar estrategias que permitan analizar qué está pasando con la enseñanza de los conceptos en matemáticas, particularmente resulta importante conocer cuál es ese conocimiento que está movilizando el docente alrededor de las fracciones, es aquí donde utilizamos el modelo MTSK para analizar e identificar ese conocimiento.

■ Marco teórico

Se presentan dos ejes teóricos, el primero es el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (ver figura 1) presentado en Carrillo et al, (2018), este modelo dentro de sus propósitos permite organizar la práctica del docente a través de los diversos elementos o categorías que lo componen y da la posibilidad de explicar las diversas actividades que proponen los docentes y saber con qué conocimientos se relacionan. Está conformado por tres grandes dominios: el dominio del Conocimiento Matemático (MK por sus siglas en inglés), el dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK por sus siglas en inglés) y el dominio de las creencias y a su vez, cada dominio está conformado por un conjunto de subdominios.

Dominio del conocimiento matemático (MK)

Este dominio está conformado por tres subdominios basados en las diferentes formas de conocer la matemática disciplinar, escolar y didáctica. El primero es el *conocimiento de los temas* (KoT), el cual hace referencia al conocimiento profundo de los temas en matemáticas. El segundo es *conocimiento de la estructura de las*

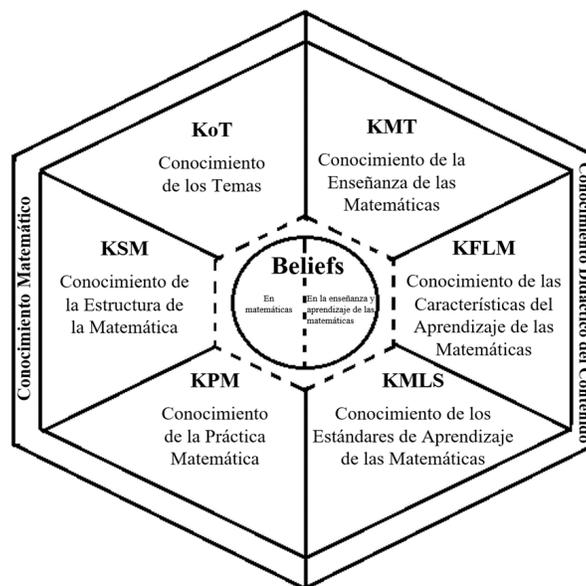
matemáticas (KSM), relacionado con el conocimiento de la conectividad entre diferentes conceptos. El tercero es el conocimiento de la práctica matemática (KPM), el cual se preocupa por estudiar las formas de proceder, crear y producir matemáticas. En conjunto, procuran estudiar todo lo relacionado con la parte conceptual del objeto matemático, sus estructuras, definiciones, ejemplificaciones, representaciones, la parte axiomática del objeto, el campo de aplicación de los conceptos, entre otros (Escudero et al, 2015).

Dominio del conocimiento didáctico del contenido (PCK)

Este dominio enfatiza que para el profesor de matemáticas no le es suficiente movilizar un solo el conocimiento disciplinar, además de esto, le es importante conocer y apoyarse de otras disciplinas que inciden en la actividad de enseñar matemáticas, a parte de un conocimiento profundo, hace falta un conocimiento didáctico de ese contenido. El docente debe saber ¿Qué, cómo y cuándo enseñar un contenido matemático?, para esto es necesario apoyarse y tener conocimiento de teorías de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, conocimiento de recursos para la enseñanza de las mismas y conocimiento de las orientaciones curriculares.

Los subdominios que conforman este dominio son, el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), el cual abarca el conocimiento relacionado con las teorías personales e institucionales que moviliza el profesor de matemáticas, además de las tareas, ejemplos, recursos utilizados para la enseñanza de esta área. En segundo lugar, encontramos el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), el cuál alude al conocimiento de diferentes teorías personales e institucionales relacionadas con el aprendizaje, aquí aparece conocimiento relacionado con las fortalezas y dificultades, obstáculos o errores típicos, asociados al aprendizaje de un determinado contenido. En tercer incluye al Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), en el cual se atienden aquellos conocimientos relacionados con las orientaciones curriculares. (Escudero et al, 2015).

Figura 1. Esquema del modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK).



Fuente: tomado de Escudero et al (2015).

Dominio de las creencias

Este dominio hace referencia al conjunto de conocimientos arraigados al docente de matemáticas, un conocimiento que es producto de su experiencia y formación, el cual incide de manera directa sobre cada uno de los demás subdominios que conforman el modelo, razón por la cual se ubica en el centro de esquema de la figura 1. De esta manera, se entiende que las creencias del profesor condicionan las decisiones al abordar elementos de cada subdominio.

Diferentes interpretaciones del concepto de fracción

El segundo eje teórico lo relacionamos con el estudio de las fracciones. Fandiño (2015) menciona que el aprendizaje de las fracciones resulta ser un proceso complejo y a largo plazo, debido a los múltiples significados o interpretaciones que se le dan a este concepto. Llinares y Sánchez (2000) presentan algunas de las interpretaciones más relevantes, estas son: la fracción como parte de una unidad-todo, a veces continua, a veces discreta, como decimales, como cociente, como relación, como razón, como operador, en probabilidad, como punto de una recta orientada, como medida, como porcentaje y como número racional.

Ahora bien, tomando en consideración los diferentes significados que se aluden al concepto de fracción, cabe preguntarse ¿cuál de todas estas interpretaciones debe presentarse o enseñarse primero y cual resulta ser la más importante? Al respecto, Ruiz (2013) menciona que “la fracción como relación parte-todo es básica para la construcción de las diferentes interpretaciones (razón, proporción, porcentaje, decimales, probabilidad, cociente, medida)” (p.71).

En este sentido, consideramos importante abordar en la secuencia de actividades el significado de fracción como relación parte-todo y como razón. En lo que corresponde a la relación parte-todo, Obando (2003) señala que este significado permite acceder a los demás conceptos de los números racionales y se constituye como un puente de entrada a la conceptualización de la unidad como un todo divisible en partes más pequeñas, sin que por esto deje de ser unidad. En cuanto al significado la fracción como razón, de acuerdo con Hoyos-Franco (2018), se entiende como la relación que se puede establecer entre dos magnitudes, se trata de una relación entre dos conjuntos que se pueden comparar.

■ Metodología

En la investigación se adoptó un enfoque cualitativo, bajo un paradigma de tipo interpretativo (Bassegy, 2003), permitiendo comprender e interpretar la naturaleza del conocimiento especializado de los profesores a intervenir. Se realizó un estudio de caso de tipo instrumental (Skate, 1995) en el cual, la información proporcionada por los profesores permitió evidenciar elementos característicos del conocimiento matemático y didáctico que movilizaron los profesores alrededor del estudio de las fracciones.

Se realizó la intervención a tres profesores del área de matemáticas con experiencia en grado quinto de primaria y se tuvo una duración de cinco sesiones al estilo taller. Como instrumentos para los docentes se utilizó una secuencia de actividades y las Regletas de Cuisenaire, ambas diseñadas por el investigador. Durante las sesiones se hicieron preguntas orientadas desde los subdominios del modelo MTSK para generar discusión frente a las actividades propuestas en la secuencia. Finalmente, para la recolección de información se utilizaron las transcripciones de las sesiones del taller con los docentes para ser analizadas mediante las categorías de los subdominios del modelo.

La secuencia estuvo conformada por seis actividades, las dos primeras se plantearon con el propósito de construir la noción de fracción a partir de la comparación entre regletas, para la tercera y cuarta actividad se proponen tareas en cuales se busca que el estudiante comprenda qué significa tener una unidad y tomar fracciones de esta, además se incluyen algunas situaciones cercanas al contexto del estudiante, con la intención de mostrar cómo un sector pequeño tomado de uno más grande puede ser representado mediante una fracción. Finalmente, para las últimas dos

actividades también se plantearon situaciones cercanas al estudiante, con la intención de que el estudiante pueda tomar dos o más fracciones de un sector y hacer sus respectivas sumas.

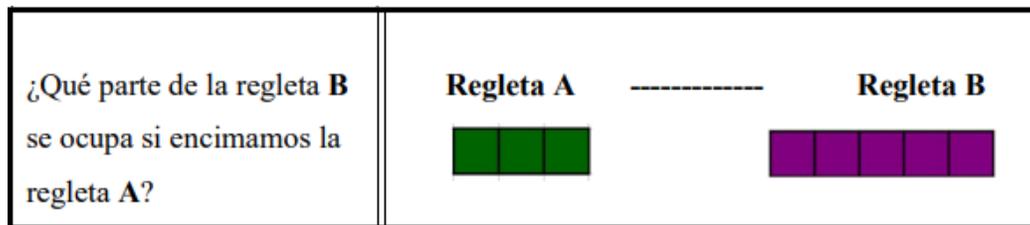
Es importante señalar que la secuencia estuvo fundamentada desde las investigaciones planteadas por Llinares y Sánchez (2000); Fandiño (2015); Gonzáles (2015), donde mencionan algunos obstáculos, errores y dificultades más recurrentes en el estudio de las fracciones por parte de los estudiantes, entre estos, mencionan la misma complejidad del concepto, la cual la remontan a la diversidad de significados aludidos a la fracción, en ocasiones aparece como relación parte-todo, medida, operador, cociente, decimal, razón, entre otros. Los autores señalan que existe un desconocimiento de estos significados, tanto de los estudiantes como del profesor, por esta razón, se consideró importante incidir por lo menos en alguno de estos significados. En este caso, los significados abordados en la secuencia fueron los de relación parte-todo de acuerdo con lo planteado por Obando (2003) y el significado de fracción como razón desde lo propuesto por Kieren (1980) y Hoyos-Franco (2018).

■ Algunos resultados

En esta sección se presentan algunos de los hallazgos encontrados durante la intervención con los docentes. Se exponen pequeños extractos de entrevista relacionados con los dominios del modelo MTSK.

Evidencias del conocimiento didáctico del contenido (PCK)

Figura 2. Superponer una regleta que no cabe un número de veces exacto sobre otra.



Fuente: elaboración propia.

Uno de los primeros hallazgos lo encontramos en la situación presente en la figura 2, la cual es tomada de la actividad 1 de la secuencia. Desde el análisis realizado por los docentes, encontramos las posibles respuestas que daría un estudiante a esta pregunta, la docente con Seudónimo María menciona que un estudiante podría responder que ocupa tres de cinco recuadros, las tres quintas partes, más de la mitad, o quizá responda que no es posible dar solución a la pregunta por el hecho de que la regleta de color verde no cabe un número exacto de veces sobre la púrpura. La docente justifica que este tipo de respuestas son posibles por el grado de escolaridad en el que se encuentran los estudiantes (ver siguiente extracto).

Investigador: ¿Qué parte de la regleta B se ocupa si encimamos una de la A?, o sea, si tomamos la de color verde y la ponemos encima de la de color púrpura. ¿Qué parte se ocupa?

María: podríamos decir que se ocupa más de la mitad, porque en quinto, ya se manejan conceptos de mitades. De hecho, desde tercero se trabaja con mitades y triples. Entonces, tal vez ellos ya puedan decir y asimilar que van a ocupar más de la mitad de la regleta B.

Este conocimiento evidenciado en la docente lo podemos relacionar con el KMLS, en el cual se menciona la importancia de conocer las nociones previas con las llega un estudiante a un grado determinado, lo que no es ajeno a las orientaciones curriculares, por ejemplo, desde los documentos propuestos por la secretaría de educación

pública de México se plantea que los estudiantes al llegar a grado quinto ya deben manejar nociones de mitades, tercios, triples, lo cual concuerda con lo mencionado por la docente María.

El siguiente extracto también está relacionado con la situación de figura 2, en este se muestra la forma en la que el docente con seudónimo Antonio menciona cómo trabajaría las fracciones con sus estudiantes:

Antonio: Yo parto de un conjunto que voy dividiendo en partes iguales, de los cuales voy a tomar la parte sombreada como el numerador y luego la parte que es total de las divisiones como el denominador. Entonces, a los niños les va a costar trabajo entender esas dos asociaciones (refiriéndose a superponer una regleta sobre la otra), se les dificultaría entender la relación que hay entre esas dos regletas, además, les puede causar conflicto el tipo de representaciones que ya han trabajado, de esta manera, al presentarlo mediante este tipo de representación, puede que no permita comprender la relación parte-todo.

Antonio muestra conocimiento sobre las fortalezas y dificultades de los estudiantes respecto al tema de fracciones. Tienen fortaleza en cuanto a la comprensión del significado parte-todo y su representación mediante áreas sombreadas, pero tienen dificultades en el cambio de representación. Este conocimiento forma parte del subdominio KFLM.

Teniendo en cuenta que las tareas de la secuencia de actividades estaban mediadas por las Regletas de Cuisenaire, en la primera sesión con el docente se interesó preguntar por la importancia de utilizar recursos en el aula de clase de matemáticas, a lo cual el docente Antonio responde lo siguiente:

Antonio: Considero que los recursos materiales y virtuales son importantes, recuerdo la teoría de Bruner, esta presenta tres fases importantes; el estudiante primero puede visualizar concretamente ese objeto matemático, manipularlo para ver que sucede con él, luego hacer una representación gráfica por medio de un dibujo, y finalmente analizarlo y desarrollarlo en su mente.

En este sentido, el docente muestra evidencias de conocimiento relacionadas con teorías de la enseñanza de las matemáticas, lo cual es propio del KMT. El docente se apoya en Bruner para señalar la importancia de los recursos materiales y virtuales, mostrando la incidencia sobre las prácticas de aula y los resultados favorables que trae consigo el uso de estos medios.

Evidencias del conocimiento matemático (MK)

Como se mencionaba desde el marco teórico, resulta importante conocer cuáles son los significados de la fracción que movilizan los docentes, en este caso, cuál fue el identificado por ellos en la secuencia de actividades. Al respecto, en el siguiente extracto se muestra el significado señalado por el docente Antonio.

Antonio: Pues yo creería que, en la primera, se ve la relación parte-todo, el todo sería la regleta que es más grande y habría que ver la relación que tiene con esa parte más pequeña o qué parte ocupa esa más pequeña en el todo que sería la regleta A, en este caso sería la regleta verde y la púrpura.

La respuesta particular del docente Antonio refiere a la situación presente en la figura 2, desde la cual identifica a la fracción como relación parte-todo. Ahora bien, aunque en la secuencia de actividades también se propone abordar a la fracción como una razón, el significado encontrado por el docente durante toda la secuencia se ve limitado la relación parte-todo. Esto concuerda con planteado por Fandiño (2015), donde se señala que muchas veces el docente tiene desconocimiento de los diferentes significados de la fracción. También, podemos encontrar relación con lo expuesto por Obando (2003), el cual menciona que los docentes en muchas ocasiones y durante toda la etapa escolar se preocupan por abordar a la fracción sólo como relación parte-todo, lo cual provocaría obstáculos a futuro al intentar presentar a fracción en otros escenarios donde su interpretación va más allá de esta relación parte de un todo. Estos elementos identificados anteriormente en el docente Antonio dan cuenta del KoT.

■ Conclusiones

Al finalizar el estudio se encontró que la mayor evidencia de los subdominios identificada en la intervención con los docentes estuvo relacionada con las categorías pertenecientes al Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM), al Conocimiento de los temas (KoT) y al Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS).

Se puede evidenciar que los docentes mostraron conocimientos relacionados con las dificultades que pueden enfrentar los estudiantes en el proceso de la construcción del concepto de fracción, conocimiento de estrategias alternas que se podrían añadir para dar fuerza a las actividades presentes en la secuencia, la importancia de los conocimientos previos para comprender temas nuevos, el proponer tareas que exijan al estudiante un mayor grado de abstracción, el uso de contextos que sean cercanos al estudiante, entre otros.

Este estudio permitió resaltar la pertinencia de usar el modelo MTSK para el análisis de actividades, así como es una herramienta importante para estudiar las planeaciones de clase o la misma práctica de aula, se convierte en una herramienta esencial para identificar el conocimiento que moviliza el docente de matemáticas al analizar material ya diseñado.

■ Agradecimientos

Este trabajo fue realizado gracias al financiamiento del Consejo Nacional Ciencia y Tecnología (CONACYT) en México, mediante la beca de maestría asignada con CVU 1099720.

■ Referencias bibliográficas

- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177%2F0022487108324554>
- Bassey, M. (2003). Case study research in educational settings. Open University Press.
- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <http://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Escudero, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA*, 10(1), 53-77 <https://doi.org/10.30827/pna.v10i1.6095>
- Fandiño, M. (2015). Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos. En L.A. Hernández, J.A. Juárez, J. Slisko (Eds.). *Tendencias en la educación matemática basada en la investigación*, (1), 25-38. Publicaciones BUAP
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31 https://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino%20Union_020%202009.pdf
- González, D. (2015). *Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones: Un estudio con alumnos de 12/13 años en Cantabria* [tesis de maestría, Universidad de Cantabria, Cantabria, España] Archivo digital. <http://hdl.handle.net/10902/6903>
- Hoyos-Franco, L. (2018). *La fracción como razón: Una experiencia de aula en grado sexto*. [tesis de maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. Archivo digital. <http://hdl.handle.net/11349/14288>
- Kieren, T. E. (1980). The rational number construct-Its elements and mechanisms. In T. E. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning*, 125-150. ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

- Llinares, S. y Sánchez, M. (2000). Las fracciones: diferentes interpretaciones. Editorial Síntesis. Madrid. 52-75
- Meléndez-Cruz, J. A., Flores-Medrano, E., & Hernández-Rebollar, L. A. (2023). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas al analizar una secuencia de suma de fracciones. *Uniciencia*, 37(1), 193-211.
- Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA*. 8 (2), 157-182
- Rojas, N., Flores, P., y Carrillo J. (2015). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar los números racionales. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 29(51), 143-166. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a08>
- Ruiz, C. (2013). *La fracción como relación parte-todo y como cociente: Propuesta Didáctica para el Colegio Los Alpes IED* [tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia] Archivo digital. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/47142>
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://doi.org/10.3102%2F0013189X015002004>
- Stake, R. (1995). *The Art of case study*. SAGE