VOL 36, NÚMERO 2, AÑO 2024

ECUACIÓN CUADRÁTICA EN UNA VARIABLE: FUNDAMENTOS Y NOTACIÓN SIMBÓLICA EN EL BACHILLERATO TECNOLÓGICO

THE QUADRATIC EQUATION IN ONE VARIABLE: FUNDAMENTALS AND SYMBOLIC NOTATION IN THE TECHNOLOGICAL HIGH SCHOOL

Ana María Ojeda Salazar, Héctor Santiago Chávez Rivera, Mario Armando Giordano Moreno
Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos No. 4 del Instituto Politécnico Nacional. (México)
amojeda@cinvestav.mx, hchavez@cinvestav.mx, mgiordano@ipn.mx

Resumen:
Por deficiencias identificadas de estudiantes del bachillerato tecnológico que concluyeron su curso de álgebra, se diseñó un hipertexto digital referente a propiedades de los reales, álgebra, la ecuación cuadrática en una variable y equivalencia proposicional. Al final de un curso posterior, previo a dos sesiones de enseñanza de su contenido, 41 estudiantes exploraron el sitio según una hoja de control que planteó 10 preguntas y que fungieron también como guion de actividad en el aula ordinaria, presencial. Investigamos la posible contribución del hipertexto a remontar dificultades de comprensión de los estudiantes de la notación simbólica, de las propiedades algebraicas y de la equivalencia lógica, para propiciar su acercamiento formal al pensamiento algebraico. De las sesiones de aula, con la colaboración del docente y videograbadas, conducidas por el diseñador del hipertexto e investigador, el buen potencial semiótico del instrumento promovió la lectura del lenguaje simbólico, identificar propiedades algebraicas y activar procesos cognitivos que exige del usuario.

Palabras clave: pensamiento algebraico; ecuación cuadrática; medio superior

Abstract:
Due to identified deficiencies of technological high school students who completed their algebra course, a website structured as a hypertext was designed, referring to properties of real numbers, algebra, the quadratic equation in one variable and propositional equivalence. At the end of a subsequent course, prior to two teaching sessions of its content, 41 students explored the site according to a control sheet that posed 10 questions and that also served as an activity script in the ordinary face-to-face classroom. We investigate the possible contribution of the hypertext to overcoming students' understanding difficulties of symbolic notation, algebraic properties and logical equivalence, to promote their formal approach to algebraic thinking. From the classroom sessions, with the collaboration of the teacher, and being videotaped and conducted by the hypertext designer and researcher, the good semiotic potential of the instrument promoted reading of symbolic language, identifying algebraic properties and activating cognitive processes required of the user.

Keywords: algebraic thinking; quadratic equation; high school

Introducción

En el marco de un convenio interinstitucional entre un bachillerato tecnológico y un centro de investigación, para conjugar docencia e investigación en matemática educativa, al finalizar el curso "Álgebra" del primer semestre, un grupo de estudiantes con buen desempeño en general contestó un cuestionario con seis preguntas abiertas. Se les pidió reconocer la notación simbólica común y la equivalencia lógica, las propiedades de los números reales y sus operaciones: idénticos e inversos aditivo y multiplicativo, orden, valor absoluto, inecuación de primer grado, ecuación de segundo grado y su solución. En coincidencia con lo que señalan otros autores (como Esty y Teppo, 1994), las respuestas de los estudiantes mostraron su reconocimiento operativo, pero no de las propiedades algebraicas; un acercamiento vago a la equivalencia, pero no a la equivalencia lógica; confusión entre exponente y coeficiente e imprecisiones en la lectura de la notación simbólica.

Debido a estas deficiencias y a la necesidad de iniciar a los jóvenes de bachillerato en los fundamentos de las matemáticas, al final de la unidad de aprendizaje "Álgebra" (DEMS, 2008) para la siguiente generación, se propuso a un grupo un hipertexto digital acerca de la notación y los fundamentos del pensamiento algebraico, referido a la ecuación cuadrática en una variable (https://matedu.cinvestav.mx/~cognicion/ecuadratica/index.html). El investigador (**I**) diseñó el hipertexto, con el fin de investigar su posible contribución a que los estudiantes ($\mathbf{E}_{\#}$'s) utilizaran la notación matemática, que aplicaran las propiedades básicas de los números reales y de sus operaciones para establecer proposiciones equivalentes como base del método lógico deductivo de las matemáticas, y que advirtieran este último para determinar la solución general de la ecuación cuadrática en una variable.

Planteamos la pregunta: ¿la exploración del hipertexto por los estudiantes y la revisión de su contenido en el aula, guiada por I, contribuyen a que ellos reconozcan la equivalencia lógica y las propiedades de los números reales en el caso de la ecuación cuadrática en una variable?

Elementos teóricos

Un acercamiento formal a las matemáticas las considera como un sistema formal, o sea: un conjunto finito de símbolos primitivos (el alfabeto o vocabulario); un conjunto de reglas para combinarlos; un conjunto de axiomas; un sistema de reglas de inferencia; y una interpretación formal. La forma de una expresión matemática es una notación que representa sus entidades (los elementos, las operaciones) y sus relaciones, según la estructura a la que corresponden las representadas. Tal estructura se fundamenta en los axiomas respectivos y en los aspectos básicos sobre los que se erige.

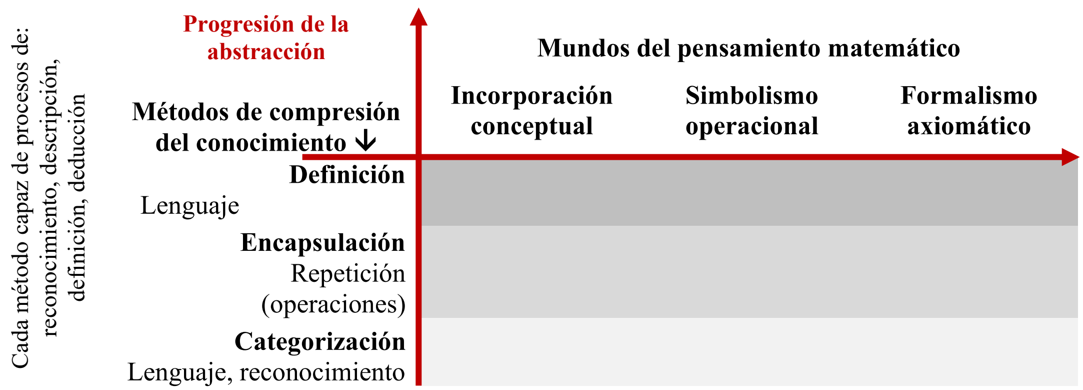
Diversos autores han señalado que el simbolismo funciona sólo cuando se interpreta su estructura (por ejemplo, Ricœur, 1995). En su estudio con estudiantes de 16 a 17 años, Hoch y Dreyfus (2004) definen el sentido de la estructura en álgebra como la capacidad de:

> ver una expresión u oración algebraica como una entidad, reconocer una expresión u oración algebraica como una estructura previamente encontrada, dividir una entidad en subestructuras, reconocer conexiones mutuas entre estructuras, reconocer qué manipulaciones es posible realizar y reconocer qué manipulaciones es útil realizar. (p. 51)

Evolución del pensamiento matemático

Tall (2013) formula cómo se aprende a pensar matemáticamente; propone tres mundos del pensamiento matemático por la abstracción lograda en la fundamentación, estructura y generalización del conocimiento matemático: la *incorporación conceptual*, el *simbolismo operacional* y el *formalismo axiomático*. Considera que esa evolución se logra por el empleo en cada mundo de métodos de *compresión* progresiva del conocimiento: la *categorización*, la *encapsulación* de procesos y la *definición*. A su vez, por nuestras capacidades naturales, en cada uno de estos métodos se ponen en juego los procesos de *reconocimiento*, *descripción*, *definición* y *deducción*. El *lenguaje*, otra capacidad nuestra natural, tiene un papel importante en los métodos de categorización y de definición. El método de encapsulación es principalmente operacional; por nuestra capacidad de *repetición*, también natural, los procesos efectuados se encapsulan, es decir, se reconstruyen, reorganizan y dan lugar a la ambigüedad entre concepto y proceso, o *procepto*, como lo denomina el autor, con lo que resulta un nivel de abstracción superior. La Figura 1 esquematiza esta descripción.

Figura 1. *Evolución del pensamiento matemático interpretada de la descripción de Tall (2013).*



Fuente: Tall (2013).

Lenguaje

Österholm (2006) ha señalado la dificultad adicional que reviste para los estudiantes de bachillerato y de universidad comprender contenidos matemáticos presentados con simbología matemática, en comparación con los presentados en lengua natural. Por ello ha puesto de relieve el descuido ordinario de la lectura de textos matemáticos en la enseñanza, en lugar de considerarla como una actividad para aprender matemáticas. Aunque la lectura y la escritura son importantes, sobre todo en bachillerato y universidad, son prácticas que se dan por sentadas en la enseñanza de matemáticas, en la que es común enfocar la atención en actividades como la operatividad y la resolución de problemas.

La mediación instrumental

Como muestran Mariotti y Maffia (2018) con un artefacto físico, no digital, la mediación instrumental en la enseñanza con tareas fundadas en el uso de artefactos culturales promueve la construcción de significados matemáticos. Según Mariotti (2013), para los expertos, “el uso de un artefacto puede evocar un conocimiento específico” (p. 442). La autora denomina *potencial semiótico* de un artefacto a “la relación doble al usarlo, por un lado, un individuo para realizar una tarea y los significados que él asigna y, por otro lado, el conocimiento que el experto evoca por ese uso y que reconoce como matemáticas” (p. 442). Añade que, en el caso de nuevas tecnologías, el diseñador del artefacto puede proporcionar un primer acercamiento a su uso en la enseñanza y explorar su potencial semiótico para la adquisición de conceptos. Según Drijvers, Doorman, Boon y van Gisbergen (2010), para que ese uso en el aula derive en *génesis instrumental*, o construcción de significados matemáticos por los estudiantes, es necesaria la guía del docente.

Método

Por el objetivo de esta investigación, **I** (investigador) diseñó el hipertexto (digital) “Ecuación Cuadrática” (Chávez, Garnica y Ojeda, 2018) como texto de estudio y de consulta, accesible en computadoras y celulares, así como soporte de la enseñanza para introducir los fundamentos del álgebra y su notación. Se le alojó en el servidor de la institución de investigación participante en el convenio. Durante dos sesiones, S_1 y tres días después S_2, de aula ordinaria presencial, **I** y **D**, este último docente titular y también investigador, desarrollaron una experienciación (Maturana y Varela, 1994) de la enseñanza del contenido del hipertexto a un grupo 41 estudiantes al finalizar su curso "Álgebra". El fin de las sesiones, S_1 de 50 min y S_2 de 100 min de duración, fue valorar el potencial semiótico del hipertexto para la enseñanza. S_1 y S_2 fueron videograbadas por **D** y se les transcribió para su análisis.

Configuración didáctica e instrumentos

El hipertexto se estructuró en cuatro páginas (**P$_i$**), cada una con sus ***vínculos***. La Tabla 1 presenta la estructura y el contenido del hipertexto.

Tabla 1. *Estructura y contenido del hipertexto "Ecuación Cuadrática".*

P$_1$: Inicio Definición y dos ejemplos	**P$_2$: Ecuación y solución** Definición, ejemplo e identidad	**P$_3$: Aspectos básicos** Especificación y cuatro ejemplos	**P$_4$: Ecuación cuadrática** Definición y forma. Parámetros y variables
Términos propios de una ecuación (página wiki)	***Ecuaciones relevantes***	***Notación-Propiedades*** Notación y seis propiedades de exponenciación, valor absoluto e idéntico aditivo de los números reales	***Ecuaciones Cuadráticas Equivalentes*** Aplicación de propiedades de los reales a enunciados para identificar su equivalencia
Importancia de las ecuaciones (vínculo y extracto de la obra Stewart, 2013)	***Ejercicios*** (cinco); solución e identidad: multiplicación por 0.	***Enunciados Equivalentes*** Definición de equivalencia lógica de dos enunciados aplicada a la ecuación cuadrática	***Método General*** Equivalencia de enunciados para identificar al discriminante como resultado de las propiedades básicas de los reales.
	Problemas (cuatro): solución posible y solución no posible; identidad y no identidad; variación	***Tarea*** (cinco ejercicios): enunciados equivalentes	***Ejercicios*** (cuatro): solución de una ecuación, ecuaciones equivalentes, método general, variación
	1 ⇒ Identidad (video): notación; inverso multipli.		

Fuente: Chávez, H. S. *et al*. (2018).

El día anterior a S_1, **D** asignó la tarea de explorar el hipertexto y contestar por escrito las preguntas planteadas en la hoja de control (HC). La Tabla 2 resume la relación entre las preguntas en HC y las páginas del hipertexto.

Condiciones de aula y modo de explotación: instrumentos adicionales

Las limitaciones de conectividad a internet de la sede del bachillerato no posibilitaron el uso del hipertexto en el aula. Por ello, para cada sesión de enseñanza se preparó una *hoja de control* (HC_1, HC_2) adicional, en la que se reprodujo de manera secuencial el contenido del hipertexto; es decir, según la Tabla 1, de izquierda a derecha, el contenido completo de cada columna seguido por el de la columna siguiente, así hasta agotar el contenido de la cuarta columna.

Tabla 2. *Correspondencia de reactivos en HC para la exploración del hipertexto.*

	Reactivos Páginas	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**
1.	Brevemente, describe el concepto de ecuación y la importancia de las ecuaciones.	ü	ü		
2.	Investiga el significado de: a) simplificar; b) término; c) número primo; y d) solución de una ecuación.	ü	ü		
3.	Describe lo relevante de la actividad mostrada en el video “*$1 \Longrightarrow$ Identidad*”.		ü		
4.	¿Qué forma tiene una ecuación cuadrática?				ü
5.	¿Qué método se usa para obtener la expresión general que determina las soluciones de la ecuación cuadrática?				ü
6.	¿Qué tan necesarios son los resultados mostrados en *Aspectos Básicos*?		ü	ü	ü
7.	De toda la notación, ¿de cuál no se especificó su significado? Describe ejemplos de notación.			ü	ü
8.	¿Cuál es la pregunta dada al final de *Método General*? ¿Por qué se plantea?				ü
9.	¿Alguna de las 17 ecuaciones descritas en el video “Ecuaciones relevantes” es una ecuación cuadrática? ¿Por qué?		ü		ü
10.	¿Qué cambios se harían al *ensayo** del libro “17 ecuaciones que cambiaron al mundo”?		ü		

Fuente: elaboración propia.

Para cada sesión se consideró el contenido suficiente para el tiempo disponible, pero se le revisaría completamente al cabo de las dos sesiones. **I** y **D** previeron usar el *pizarrón* para, con ejemplos adicionales a los presentados en el hipertexto, clarificar dudas y corregir errores que se fueran identificando en las respuestas de los estudiantes. Mediante preguntas, **I** promovería la participación de los estudiantes, primero con preguntas generales acerca del tema del hipertexto y luego con las planteadas en (HC), para identificar lo que ellos hubieran reconocido en su exploración. **I** condujo las dos sesiones a lo largo del contenido del hipertexto, reproducido en HC_1 y en HC_2.

Criterios de análisis

Identificamos trayectorias de enseñanza, que Garnica, Chávez y Ojeda (2017) definen como unidades de contenido matemático diseñadas en secuencias, con el propósito de comunicarlo a los estudiantes. Esas unidades son: notación, definición, identidad, equivalencia lógica y propiedades, si bien están interrelacionadas. A partir de sus intervenciones, identificamos la correspondencia respectiva con los procesos, métodos de compresión del conocimiento y mundo de pensamiento matemático en el que se ubicaría el desempeño general de los estudiantes. Aclaramos que distinguimos entre dos sentidos de "definición": uno, como parte de la semántica en el sistema formal de las matemáticas; otro, como proceso del pensamiento.

Desempeño didáctico y resultados

A lo largo de las dos sesiones, **I** fue recuperando las preguntas en HC y los estudiantes recurrieron a sus respuestas a la tarea anotadas en sus cuadernos para contestarle a **I**. Los 4 min iniciales de la sesión S_1 se dedicaron a reconocer la estructura general del hipertexto (véase la Tabla 1). Luego de ese tiempo, se proporcionó a los estudiantes la hoja de control HC_1 para que dispusieran de una guía puntual del hipertexto. Al inicio de la sesión S_2 se distribuyó la hoja de control HC_2, correspondiente a la reproducción en secuencia del contenido de los vínculos del hipertexto que no se alcanzaron a revisar en S_1.

En la enseñanza, aunque al referirse al contenido de cada página del hipertexto **I** planteó preguntas que los estudiantes respondieron con sus contestaciones a HC, en el curso de las dos sesiones sus dificultades emergieron y se fueron remontando, porque **I** propició que se expresaran y los guio por los contenidos de interés. Para cada página y cada vínculo promovió la lectura del lenguaje simbólico presentado en el hipertexto y la expresión de dudas.

Según la propuesta de Tall (2013), en general se identificaron indicios de *categorización* para el mundo de incorporación conceptual con procesos de reconocimiento y de lenguaje. Algunos estudiantes (**$E_{\#}$**) dieron indicios de esos procesos en el mundo del *simbolismo operacional*, como *proceptos* (véase la Figura 1), aunque no de forma consistente.

En los episodios de las sesiones, transcritos y seleccionados como ejemplos de nuestras observaciones, **I** denota al conductor de la enseñanza, **D** al docente titular del grupo, **$E_{\#}$** al estudiante particular, **E's** a varios estudiantes y **$E_?$** al que intervino fuera de cuadro. Con **P_i** nos referimos a las distintas páginas del hipertexto. Los datos adicionales a lo verbalizado en las interacciones, como las ostensiones y los referentes, los indicamos entre paréntesis rectangular. Registramos de corrido el tiempo (h:min:s) de enseñanza en las dos sesiones.

Notación

En distintos episodios **I** hizo énfasis en la escritura y lectura de la notación simbólica. Por ejemplo, para la página P_3, resaltó al cuantificador universal ("), al símbolo conjuntista de pertenencia (∈) y a los números reales (ℝ):

00:14:36	I	[Anota en el pizarrón] Esto **se lee** de la siguiente manera: [lee] "**para todo** x, y que pertenecen a los números reales… **para todo** x, y en R."

I también destacó en distintas ocasiones la *forma* de la notación de entidades y de sus relaciones, de acuerdo con su estructura, lo que Bruner (1986) ha señalado como el primer paso en la formación de conceptos. Por ejemplo, en S_1, para la página P_4 (véase en la Tabla 1) del hipertexto, uno de los episodios fue el siguiente:

00:43:24	E_1	[Lee en HC] "¿Qué **forma** tiene una ecuación cuadrática?"
00:43:27	I	¿Qué **forma** tiene? [Repite la pregunta a E_1] ¿Qué forma tiene?
00:43:33	E_1,E_7	[Le van dictando a I, que anota en el pizarrón] a x cuadrada más b x más c es igual a 0.

00:43:49	I	¿Cuántos términos **al menos** debe tener una ecuación cuadrática?
00:43:55	E's	[Al tiempo] ¡Tres!
00:43:56	I	[Expresa (gesto) de extrañeza].
00:43:57	E_7	¡Cuatro!, cuatro al contar el 0.
00:44:02	I	[Se vuelve al pizarrón y anota $ax^2 = 0$] ¿Ésta no sería una ecuación cuadrática?
00:44:08	E_6	Sí sería una ecuación **cuadrática** porque **tiene el término al cuadrado**…
00:45:08	I	[…] Este… ¿qué valor **no se permite** para a?
00:45:14	E_{13}	Cero.

En S_2, un episodio mostró la dificultad de distinguir entre parámetro y variable:

00:48:40	I	La pregunta es: ¿qué diferencia hay entre, por ejemplo, la a y la x? [señala las literales respectivas en la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ anotada en el pizarrón].
00:48:55	E_2	Que a puede ser un **valor cualquiera** y x es un **valor específico**.
00:49:04	I	A ver [se voltea hacia el pizarrón], repítelo.
00:49:08	E_2	Que a es el término de la ecuación, **qué número determina la ecuación** y x es el… ¿la incógnita?
00:49:50	I	¿Qué valor puede recibir aquí…?, voy a cambiar [anota el polinomio ax^3 en el pizarrón]. ¿Qué valor puede recibir la x?
00:49:55	$E_?$	Bueno, cualquier valor que… cualquier.
00:50:00	I	¿Cualquier?
00:50:01	$E_?$	Cualquier.
00:50:02	E_8	¡¡No, no, no!, pues **un valor que satisfaga la ecuación**.
00:50:04	I	¡Aquí, aquí! [Insiste y señala al polinomio que acaba de anotar, no a la ecuación].
00:50:08	E_8	Sí, ahí. Igual.
00:50:09	I	¿Y éste? [Señala la a].
00:50:10	$E_?$	**Igual**.
00:50:11	I	Pero ¿cuál es la diferencia?
00:51:24	I	[…] La diferencia es que ésta [señala a la x] **se conoce** como **variable**, y ésta como **parámetro** [señala a la a]. Un

parámetro es una variable, pero una vez que se le da un valor a esta literal, queda **fijo**, ¿sí? ¿Sí están de acuerdo?

El reconocimiento del inverso aditivo se dificultó en S_2 al cambiar el nombre de una categoría aún en formación, como sustituir el término "solución" por el de "raíz" de una ecuación:

1:39:26	I	A ver, ¿quién me dice las **raíces** de esa ecuación? [Se refiere a la expresión anotada en el pizarrón $z^3 - z^2 - 34 \cdot z - 56 = (z+2)(z+4)(z-7) = 0$].
1:40:03	I	¿Qué número tendría que poner aquí para que esto dé cero?
1:40:06	E_1	¿Dos?
1:40:10	E_{17}	¡Menos 2!
1:40:12	I	¡Menos 2!, ¿no?
1:40:14	I	¿Otra raíz?
1:40:15	E's	¡Menos 4!
1:40:17	I	¿Otra raíz?
1:40:18	E's	¡El 7!
1:40:20	I	¡Entonces son raíces!, ¿no?
1:40:32	E_{16}	¡No entiendo!
1:40:34	I	¿Mande?
1:40:36	E_{22}	No entiende.
1:40:38	E_{16}	O sea, ¿por qué ocuparon… jajaja, ya me dio pena, jiiji… **raíces**?

Estos episodios de enseñanza atañen al rol del proceso de *lenguaje* en los métodos de compresión del conocimiento de *categorización* y *definición* (véase la Figura 1).

Definición

I recuperó conocimientos ya adquiridos (*set before*) por los estudiantes para tratar aspectos básicos de los números reales. Por ejemplo, respecto al reactivo 2c) en HC (véase en la Tabla 2):

00:42:15	I	Bueno, número primo [consulta en HC], pues ya saben… ¿Qué es un número primo?
00:42:18	E_7	Son aquellos números que no se pueden dividir entre otros. Se dividen entre ellos y con uno, pero no se dividen entre otros.

I también recurrió al axioma de orden para definir intervalo abierto, incluido en P_3 $(x \in (a,b))$:

00:15:18	I	¿Esto **qué significa**? [escribe en el pizarrón (a, b)] ¿Quién es a, b? ¿Esto [señala a lo escrito en el pizarrón] qué representará?
00:17:05	I	[…] Pero en este caso me están diciendo [en P_3] que es un **conjunto**, y este conjunto se llama "**intervalo abierto**", ¿sí? Y esto **significa** que la x **es mayor que** a **y menor que** b. [Escribe en el pizarrón $a < x < b$].
00:17:57	I	En el caso del intervalo abierto, los extre… éstos [los señala] son los **extremos del intervalo**, no se tocan, ¿sí?

En S_1, la convencionalidad de denotar los conjuntos de números, citados en P_3, con la inicial de su nombre, se remontó al atender a la *forma* de la expresión simbólica de su definición:

00:9:32	I	¿Qué me representan esa $\mathbb{N}$, esa $\mathbb{I}$ y esa $\mathbb{R}$, …?
00:9:38	E_2	[Inentendible] reales.
00:9:41	I	La erre de los números reales; ¿la $\mathbb{I}$?
00:9:44	$E_?$	¡Imaginarios!
00:9:54	E_1	¡Irracionales!
00:9:56	I	Los números irracionales. ¿Y la $\mathbb{N}$?
00:9:58	E's	Naturales.
00:11:13	I	[…] Pero éste [señala en el pizarrón a $\mathbb{Q}$], ¿quién es este **conjunto**?
00:11:23	I	¿No? Lo voy a escribir, a ver si lo identifican [anota lo que va diciendo] Q [$\mathbb{Q}$] es el conjunto de los elementos que son de esta **forma**, tal que a coma b están en éste [señala a $\mathbb{Z}$ en: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \middle\| a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$].
00:11:38	I	A ver si identifican éste… y éste de aquí, b… ¿quién es este **conjunto**? [vuelve a señalar a $\mathbb{Z}$].
00:11:56	E_{12}	¡Enteros!
00:12:08	I	Y entonces, ¿quiénes… cómo se llaman éstos? [señala a $\mathbb{Q}$].
00:12:10	E_{12}	¡Racionales!
…	…	…
00:13:21	I	Fíjate, ¿dónde tiene que estar a? [la señala en: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \middle\| a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$].
00:13:30	E_7	En $\mathbb{Z}$.
00:13:33	I	¿Y b?
00:13:34	E_6	También.

00:13:35	I	También, ¡pero **no puede ser cero!** [lo señala en $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \middle| a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$].
00:13:53	I	[…] [Asiente a la observación de E_3] Por eso se llama **racional**, de **razón** [coloca su mano derecha arriba de la izquierda, para indicar numerador y denominador].

Este episodio, al igual que para la trayectoria de enseñanza anterior, atañe a los métodos de compresión del conocimiento de *categorización* y de *definición*, en los que el proceso de *lenguaje* es primordial (véase la Figura 1).

Para el vínculo *Notación-Propiedades* de P_3 (véase la Tabla 1), de particular interés fue un episodio de S_2 relativo a la expresión simbólica $|x| = \begin{cases} x & si\ \ x \geq 0 \\ -x & si\ \ x < 0 \end{cases}$ del valor absoluto de un número, que **I** presentó en el pizarrón y la aplicó con los estudiantes a un valor negativo de x **antes de** proponerles aplicarla a $|x^2–5|$, que también anotó. Para esta última, la interacción reveló la dificultad de los estudiantes en diferenciar entre una "condición", explícita con la conjunción "si" en la definición, y la "suposición" de que se cumpla esa condición:

1:13:53	I	Una pregunta. Ya que estamos en esto [anota un ejemplo en el pizarrón]. ¿A qué sería igual eso?
1:14:10	E_3	¿Menos x cuadrada más 5?
1:14:19	I	¿Por qué? Dime, ¿qué estás **suponiendo**?
1:14:24	E_3	[No responde].
1:14:27	I	Él me dijo lo siguiente: esto es igual… o sea, su valor… el… el valor absoluto de esto va a ser igual a [repite lo que dijo E_3 y anota en el pizarrón] "menos x cuadrada más 5". Yo le pregunté que qué es lo que está **suponiendo** él.
1:14:48	E_1	Está multiplicando, ¿no? [se refiere a qué operación habría realizado E_3 en lugar de qué fue lo que supuso].
1:14:50	I	¿Por qué?
1:14:51	E_1	[Persiste en su interpretación operativa de la pregunta de I] Porque si dice que es x cuadrada más 5, eso nada más… este… es… ah… menos, por menos, es más. Entonces, ya queda el x… queda el x cuadrada y, me imagino, que sería más 5, sería más por menos, menos…

A la intervención de E_1 siguieron otras en las que privó la interpretación operativa de la pregunta de **I**, al inadvertir que *suponer* una *condición* implica considerarla verdadera y luego sujetar a ella un razonamiento u operar. Así ocurrió hasta que **I** lo hizo explícito:

1:15:55	I	De hecho, cuando tenemos un… un… una ecuación, o algo así, **para** poder **operar** con ella, lo que tenemos que hacer es **quitar las barras**.
1:16:06	I	Pero si es este tipo de cosas, para poderlo hacer tenemos que **suponer** [hace énfasis y se dirige a E_3] y en este caso va a haber

		siempre dos opciones: o es **positivo**, o es **negativo**. ¿De acuerdo?
1:16:22	I	Es lo que tú hiciste, **supusiste** que era **negativo**. No consciente, pero lo **supusiste**. ¿Están de acuerdo? [se voltea hacia el pizarrón].
1:16:29	E_3	¿Entonces estoy bien?
1:16:30	I	¿Mande?
1:16:31	E_3	¿Sí lo dije bien?
1:16:32	I	¡Sí! Él multiplicó por -1, pero **supuso** que era negativo. ¿Mhum?

No parece que para E_3 haya quedado claro que aplicar la definición del valor absoluto primero requiere suponer que se satisface cada condición, luego determinar los valores respectivos y revisar si cada uno de ellos es o no posible de acuerdo con el dominio de la variable.

Identidad

Aunque **I** revisó en S_1 el contenido de P_2 (véase la Tabla 1), en S_2 tuvo que subrayar el dominio de definición de la variable de una ecuación para determinar si al sustituir en ella los valores con los que se obtiene una identidad ($0 = 0$) son soluciones posibles:

00:44:41	I	[En el ejemplo $ax^2 = 0$ en el pizarrón] ¿Cuánto tendría que **valer** x?
00:44:44	E_7	Cero.
00:44:45	I	¡Cero!, ¿verdad? Porque 0 por a [el coeficiente en la forma general de la ecuación] me da 0 [señala al pizarrón]. Entonces obtengo una… **identidad**, ¿no? [anota en el pizarrón $0 = 0$].
1:54:26	I	[…] ¡Vamos a llevarlo a… cuando ustedes resuelven una ecuación, en este caso cuadrática o lineal, obtienen dos valores, ¿sí? O, en el caso de una lineal, un solo valor.
1:54:42	I	Y cuando lo llevan y lo sustituyen, ¿qué obtienen?
1:54:46	E_8	Cero.
1:54:47	I	¿Por qué cero? O… obtienen una **identidad**, ¿no? Cero igual a cero, ¿sí?
1:54:54	I	**Significa** que [el sustituto] **es** un **valor posible**.
1:54:59	I	Pero aquí [se refiere a: "$u = w^2 - 2w - 3$, w varía entre 3 y 9. $u = -3$ **no es** un valor posible" en el vínculo ***Problemas*** de **P_2**], ¡les dice que **no es posible**! ¿Qué es lo que está pasando ahí? ¿Qué significaría **no posible**?
1:55:07	E_1	Pues… que no… que no **dependa**, que **no dé cero**, o que no dé [inentendible]
1:55:14	I	Que no va a un… o que ¡no cubre con las condiciones del problema!, ¿de acuerdo?
1:55:19	E_8	¡Ah, ya, ya, ya!

Equivalencia lógica

A partir de la definición del conectivo de doble implicación (si y sólo si), el vínculo de *Enunciados equivalentes* de la página P_3 muestra la equivalencia lógica entre distintas formas de la ecuación cuadrática por la aplicación de los axiomas de los números reales. Aunque los estudiantes mostraron un uso apropiado del término "equivalente", no lograron explicar en qué consistía. Por ejemplo, en S_1, respecto al reactivo 2 en HC de investigar el significado de simplificar (véase la Tabla 2), se manifestó el conocimiento particular adquirido (*set before*) de simplificación de cantidades numéricas:

00:29:26	E_6	[Simplificar] Es convertir una expresión matemática en una más simple, pero **equivalente**… a otra.
00:29:57	I	Ahora sí, obtener una más simple y **equivalente** a la primera, pero ¿qué significa más simple?
00:30:24	I	¿Cómo la hacemos más simple? O sea, porque eso de más simple no sabemos a dónde vamos a llegar, ¿no? (…) ¿hasta dónde vamos a parar ese proceso?
00:30:51	E_7	¡Hasta que haya números primos!
00:30:56	I	En el caso de… si tenemos números, hasta que haya números primos, o sea, que ya no haya manera de simpl… Bueno. ¿Qué usamos para simplificar una expresión?
00:31:07	E_7	Colocaciones, agrupaciones…

Aunque ya era el final del curso de "Álgebra", en S_1 los estudiantes parecieron inadvertir que la consecución de igualdades en los procedimientos algebraicos se deriva de la aplicación de los axiomas de los números reales, o el rol sintáctico de los paréntesis, como han señalado Hoch y Dreyfus (2004); o el significado del exponente en las expresiones del inverso multiplicativo, $\frac{1}{x}$, x^{-1}, $\left(\frac{1}{x}\right)$, (x^{-1}), en el vínculo *1⇒Identidad* de P_2 (véase la Tabla 2):

00:20:52	I	¿Por qué dos **enunciados** son **equivalentes**? ¿Por qué se define ahí?
00:21:54	E_1	[…] nos decía [en la página P_2] que hay diferentes aspectos que hacen que un enunciado sea equivalente ya sea … que los valores sean iguales, o que tengan cuadrado, también puede ser que **otra característica** del **inverso multiplicativo** es que tenga **paréntesis** y que tenga la… **el valor aumentado** a ¿1?, ¿o a **menos 1**?... para poder… como saber si es un **inverso** [inentendible] características.

La *descripción* de E_1 de proposiciones equivalentes con el inverso multiplicativo indica que su método de *categorización* lo ubica aún en el mundo de *incorporación conceptual*. Varias respuestas de los estudiantes indicaron para ese mundo el método de compresión por *encapsulación*. Por ejemplo, en S_2, para la solución de la ecuación cuadrática en P_4 (véase el reactivo 5 en la Tabla 2), E_7 citó al instante incorrectamente su fórmula general, sin que **I** atendiera a la incorrección porque su objetivo era que los jóvenes identificaran el papel de la equivalencia lógica en lugar de aplicar la regla de "completar el binomio cuadrado perfecto":

00:56:21	I	Vamos a pasar al número 5 [en HC], que dice [lee] "¿Qué método se usa para obtener la **expresión general** que determina la solución de la ecuación cuadrática?"
00:56:32	E_7	X es igual a menos b **cuadrada** [incorrecto] más menos la raíz cuadrada de b cuadrada menos 4 ac sobre 2a. Ésa es una fórmula, la fórmula general.
00:56:46	I	Ésa es una fórmula general, pero **no es el método**.
00:58:31	I	[…] Y entonces, si se fijan, en el ejemplo [HC_2] digo que Q y P son dos enunciados; de hecho, son dos expresiones, son dos ecuaciones. Y digo que esas son equivalentes y hago todo el procedimiento que está ahí.
00:58:46	I	O sea, ¿qué es lo que tengo que hacer? Tengo que ver que P es consecuencia de Q y que Q es consecuencia de P. ¿Sí?
00:58:55	I	O sea, ése es el método que se usó en ese lugar, en el sitio de ecuación cuadrática.

No es claro que los estudiantes hayan advertido en qué consiste la equivalencia lógica para la consecución de identidades basadas en las propiedades de los reales. De forma vaga calificaron de "equivalente" una expresión algebraica que puede substituir a otra porque posee las mismas características o significado.

Propiedades

En distintos episodios se pusieron en juego las propiedades de los reales y de sus distintos tipos de números. Por ejemplo, la definición de conjunto cerrado introducida en S_1 se aprovechó en S_2 para revisar en P_3 y en P_2 las propiedades de los distintos tipos de números reales:

00:42:15	I	Eso de que, por ejemplo, que dados dos números y que su suma caiga… que sea otro número, se dice que los conjuntos de números son **cerrados**, ¿sí?
1:02:02	I	[…] O sea que, **si yo sumo dos números, obtengo un número que pertenece al conjunto**, ¿sí? Por ejemplo, si tenemos dos naturales y sumo los naturales, obtengo un natural. Si agarro **dos enteros y sumo, obtengo entero**. Y **si dos racionales, obtengo racional**, ¿sí?
1:02:28	I	No pasa así… pero, por ejemplo, ¿yo podría hablar de la **división** en el conjunto de los números naturales?
1:48:55	I	[…] ¿Cuándo **un producto** es cero? [en el vínculo *Ejercicios* de P_2: $(w-9)(w-13)=0$].
1:49:12	E_{19}	Cuando se **multiplica** por cero. [Como si sólo parafraseara la pregunta].
1:49:17	I	¿De qué otra manera me podrías decir eso? [Intenta que precise su respuesta]
1:49:29	E_{19}	Cuando a un número positivo le **sumas un** número negativo…

1:49:36	I	Bueno. **Retoma** lo primero que me dijiste. O sea, aquí tengo un **producto** que es cero [denotó cada factor por a y b, respectivamente]. ¿Cómo puedo asegurar que es cero ese producto? ¿Qué puedo decir de a y qué puedo decir de b?
1:49:37	E_{19}	Que uno de esos es cero.
1:49:51	I	Que uno de esos fact… es **factor**, este… ¡Que uno de éstos es cero, o ambos son cero!
1:50:18	E_3	[Pide la palabra y pregunta] Pero, bueno, no sé si esté bien, si no… ¡no pueden ser los dos!, o este… ¿tendría que ser **la misma letra**, tendría que ser arriba?
1:50:25	I	Pues igual le puedo hacer, pero obtengo cero.
1:50:29	E_3	Ah, sí, pero yo creo que los factores tienen que ser los mismos para que sean los mismos números.

Con sus dos últimas intervenciones, E_3 expresó su dificultad en conciliar las ideas de orden (ley de la tricotomía de los números reales) y de variación, al asignar dos valores distintos (9 y 13) a la misma representante de la variable (w) y aceptar lo que **I** señaló: que "uno **o ambos** son cero". También respecto a P_2, al factorizar $a^2 + a$, los estudiantes *reconocieron* expresiones equivalentes a ella. Con la lectura de *definiciones* de conceptos se les propusieron ejemplos, como el de raíz de una ecuación; se distinguió entre parámetro y variable en la ecuación cuadrática y se diferenció entre método y regla, que concierne al proceso de *deducción*.

Conclusión

Distintos episodios de la experienciación indicaron, en acuerdo con Hoch y Dreyfus (2004), Österholm (2006) y Planas (2021), que la enseñanza de las matemáticas debe atender al lenguaje para el aprendizaje de contenidos matemáticos precisos, no sólo para la lectura, sino para la expresión oral referida a ellos, al parafraseo con distintos tipos de expresiones simbólicas de las entidades matemáticas, de sus relaciones y hacerlas explícitas. Especificar cada uno de los términos o nombres para referirse a las entidades matemáticas es crucial para iniciar su *categorización* (Tall, 2013) y, por su *repetición* (uso) en distintas instancias, promover su *reconocimiento* (Figura 1). Esto es de particular importancia para preparar una iniciación en la formalización de las matemáticas. La experienciación de la enseñanza en el aula referida al hipertexto y a su contenido indicó que el desempeño de los estudiantes se ubicaba, en general, en el mundo de incorporación conceptual (Tall, 2013). Subrayó la necesidad de que los estudiantes identifiquen, describan y expresen de forma explícita las propiedades de los números reales y la equivalencia lógica al solucionar ecuaciones de segundo grado, para iniciarlos en el razonamiento matemático más allá de sólo el procedimental. Aun y cuando la exploración previa del hipertexto por los jóvenes fue útil para tratar su contenido en el aula, fue insuficiente para dar lugar a una *génesis instrumental* (Drijvers *et al*., 2010). Se hubiera requerido un seguimiento individual durante las sesiones de aula para detectar sus posibles indicios frente al uso efectivo del hipertexto por ellos, suponiendo salvada la exigencia técnica del registro de datos. Pero aún con la ausencia del hipertexto y con sólo dos sesiones de enseñanza en aula, la referencia a él por los estudiantes al responder las preguntas que **I** les planteó sugiere su buen *potencial semiótico* (Mariotti, 2013) como medio para la enseñanza de la ecuación cuadrática e iniciar una introducción a la formalización del conocimiento algebraico.

Referencias

Bruner, J. (1986). *El proceso mental en el aprendizaje*. Madrid: Narcea, S. A. de C. V.

Chávez, H., Garnica, I., Ojeda, A. M. (2018). *Método Hipertexto para la Integración del Conocimiento: Ecuación Cuadrática*. México: DME, Cinvestav. Hipertexto digital disponible en https://matedu.cinvestav.mx/~cognicion/ecuadratica/index.html

Dirección de Educación Media Superior (DEMS-IPN). (2008). *Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: Álgebra*. México: IPN.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P. y van Gisbergen, S. (2010). Instrumental Orchestration: Theory and practice. *Proceedings of CERME 6*, January 28th-February 1st, 2009, Lyon France © INRP 2010. www.inrp.fr/editions/cerme6

Esty, W. y Teppo, A. (1994). A General-Education Course Emphasizing Mathematical Language and Reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, **16**, 1, pp. 13-35.

Garnica, I., Chávez, H. S., Ojeda, A. M. (2017). Expresiones figural y escrita de la idea de porcentaje: Experiencia de enseñanza con estudiantes sordos de 17 a 24 años. En *Habla del silencio: Estudios interdisciplinarios sobre la Lengua de Señas Mexicana y la Comunidad Sorda* (Cruz-Aldrete, M., coord..), pp. 211-237. México: UAEMor, Bonilla Artigas Editores.

Hoch, M., Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: the effect of brackets. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3 pp 49–56.

Mariotti, M. y Maffia, A. (2018). From using artifacts to mathematical meaning: the teacher´s role in the semiotic mediation process. *Didattica della matematica. Dalle ricerche alle pratiche d'aula*, (3), 50-63.

Mariotti, M. (2013). Introducing students to geometric theorems: how the teacher can exploit the semiotic potential of a DGS. *ZDM*, 45, 441–452.

Maturana, H. y Varela, F. (1994). *El árbol del conocimiento*. Santiago de Chile: Universitaria.

Österholm, M. (2006). Characterizing Reading Comprehension of Mathematical Texts. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 63, No. 3, pp. 325-346. DOl: 1O.1007/slO649-005-9016-y

Planas, N. (2021). How specifc can language as resource become for the teaching of algebraic concepts? *ZDM*, 53:277–288. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01190-6

Ricœur, P. (1995). *Teoría de la interpretación. Discurso y excedente de sentido*. México: Universidad Iberoamericana, Siglo XXI.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically. Exploring the three worlds of mathematics.* Cambridge University Press.

Stewart, I. (2013). *17 ecuaciones que cambiaron el mundo*. Barcelona: Ed. Crítica.