VOL 36, NÚMERO 2, AÑO 2024

DE LA GEOMETRÍA AL CÁLCULO: COVARIACIÓN LOGARÍTMICA-EXPONENCIAL

FROM GEOMETRY TO CALCULUS: LOGARITHMIC-EXPONENTIAL COVARIATION

Marcela Ferrari Escolá, José Antonio Bonilla Solano
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
mferrari@uagro.mx, jbonillasolano@gmail.com

Resumen:
Argumentos geométricos, muy presentes en la generación del Cálculo, están ausentes en el discurso matemático escolar actual. En esta investigación estamos estudiando como impacta, en el desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico-exponencial, diseños de actividades que rescatan argumentos del siglo XVIII, en profesores en formación. La metodología utilizada es la investigación basada en diseño. Reportamos el análisis de las producciones de 3 informantes que participaron en un experimento de enseñanza en el marco de un curso de Didáctica de las matemáticas a nivel universitario logrando abstraer el nivel covariación continúa fragmentada y dándonos luz para reflexionar sobre el diseño utilizado.

Palabras clave: razonamiento covariacional – argumentos geométricos de Agnesi – función exponencial

Abstract:
Geometric arguments, often present in the generation of Calculus, are absent in the current school mathematical discourse. In this research, we are studying how the design of activities which rescue eighteenth-century arguments impact on the development of co-variation logarithmic-exponential reasoning in pre-service teachers. The methodology used is design-based research. We report the analysis of the productions of 3 informants who were involved in a teaching experiment in the framework of a Didactics of Mathematics university course, managing to abstract the fragmented continuous covariation level and giving us light to reflect on the design used.

Keywords: covariational reasoning - Agnesi's geometric arguments – exponential function

Introducción

Los recientes estudios sobre la enseñanza de las funciones logaritmo y exponencial han sido reportados desde diferentes perspectivas buscando relacionar ambas funciones. Algunos trabajos han documentado el paso de las relaciones exponenciales a las logarítmicas a través de la examinación del pH (Glassmeyer et al., 2020); o sobre cómo una clase sobre estas funciones, mediada por herramientas tecnológicas, impacta en estudiantes (Gruver, 2018); y también en la importancia de estas funciones para entender las noticias relacionadas con la pandemia de la COVID-19 que enfrentamos hace poco tiempo (Siller et al., 2022).

En efecto, la naturaleza de ambas funciones hace que no podamos pensar en una sin reconocer a la otra. En este sentido, Kuper y Carlson (2020) proponen un conjunto de ideas fundamentales para el entendimiento de estas funciones, poniendo énfasis en el crecimiento exponencial, el cual refiere que en la relación de dos cantidades A y B se entiende que por cambios iguales en la cantidad A, la cantidad B crece por un factor constante, entonces las dos cantidades se relacionan exponencialmente.

Por su parte, Ferrari et al. (2016) robustece la idea de ambas funciones al entenderlas como la coexistencia de una variación regida por razones constantes y otra por diferencias constantes a la que llama covariación logarítmico-exponencial. En su trabajo los autores reconocen que la graficación y las expresiones algebraicas son evidencia del desarrollo del razonamiento covariacional (Thompson y Carlson, 2017) logarítmico-exponencial.

En esta investigación nos interesa analizar sobre la génesis de diseños de aprendizaje, en libros de Geogebra, como disparadores de la covariación logarítmica-exponencial, sustentados en la recuperación de argumentos geométricos retomados de los trabajos del libro *Instituzioni Analitiche ad uso della gioventù* de Agnesi (1747), quien propone la construcción de la curva logarítmica a partir de una partición en el eje x con una progresión aritmética y la construcción de rectas perpendiculares en proporción geométrica que corresponda a esa partición.

Marco teórico

Esta investigación se sustenta en una visión socioepistemológica (Cantoral, 2013) recuperando argumentos primigenios que dan fortaleza a la discusión del discurso matemático escolar actual y que emergen de prácticas sociales propias de comunidades específicas, en nuestro caso, de los matemáticos del siglo XVII y XVIII. Incorporamos en esta discusión, para establecer la trayectoria de aprendizaje, elementos del razonamiento covariacional de Thompson y Carlson (2017), niveles que hemos adaptado para el desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico-exponencial desde estudios socioepistemológicos (Ferrari y Farfán, 2010; Ferrari, 2008) que sustentan la construcción del saber (Tabla 1).

Tabla 1. *Síntesis de niveles de razonamiento covariacional logarítmico-exponencial.*

Nivel	Características
0.- Sin coordinación	La atención está en el crecimiento de una variable sin reparar en la variación de la otra.
1.- Pre-coordinación de valores	Se percibe que, si una variable aumenta una cantidad constante, el valor de la otra variable cambia (aumenta o disminuye) de manera proporcional a la anterior.
2.- Coordinación fragmentada de valores	Se percibe que una variable cambia sumándole una constante (crecimiento lineal) y la otra variable cambia multiplicándose por otra constante (crecimiento geométrico) sin abstraer un objeto multiplicativo.
3.- Coordinación de valores	Se coordinan los valores de una variable con los valores de otra variable creando una colección discreta de pares. Emerge un objeto multiplicativo al predecir, en conjunto, el siguiente par de datos, uno sumando, el otro multiplicando.

4.- Covariación contínua fragmentada	Se puede esbozar una gráfica continua que ajuste todos los puntos construidos en un plano cartesiano, pero no se abstrae la completitud de los conjuntos de valores que se involucran. Se abstrae una relación entre las variables.
5.- Covariación continua suave	Se explicita una relación entre las variables considerando que $f(x+\Delta x)/f(x)$ es constante y que los números reales constituyen dominio e imagen.

Fuente: adaptación de niveles de razonamiento covariacional de Thompson y Carlson (2017).

Metodología

La metodología utilizada es la investigación basada en diseño que implica procesos de iteración y bucles de retroalimentación, de manera que el desarrollo de la investigación tiene lugar a través de ciclos de diseño, análisis y rediseño donde se involucra experimentos de enseñanza para la recopilación de datos (Steffe & Thompson, 2000).

El diseño del experimento de enseñanza utilizado en esta investigación se basó en un estudio socioepistemológico reportado por Ferrari (2008) así como en otros experimentos de enseñanza (Ellis et al., 2016; Ferrari-Escolá et al., 2016; Trejo et al., 2021), donde se utilizó, como constructo teórico articulador de los diseños de aprendizaje, que las funciones logarítmicas y exponenciales emergen de la coordinación de un crecimiento aritmético y un crecimiento geométrico, isomorfismo que llamaremos *covariación logarítmica-exponencial*.

En esta investigación nos cuestionamos sobre: ¿qué argumentos evidencian el desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico exponencial en profesores en formación trabajando en modalidad virtual?

Toma de datos y data análisis

El experimento de enseñanza se aplicó con 11 estudiantes de tercer semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, en la asignatura de Didáctica de las Matemáticas I. Durante tres semanas se realizaron actividades en modalidad síncrona, de 100 minutos (3 veces a la semana) a través de la plataforma zoom, y asíncronas con el uso de libros de Geogebra. En las sesiones síncronas los estudiantes eran divididos en dos equipos (trabajando en una nueva tarea en los libros o discutiendo lo trabajado en lo asíncrono) y después se hacía una discusión general que se esperaba nutriera los reportes finales de los estudiantes en los libros de GeoGebra

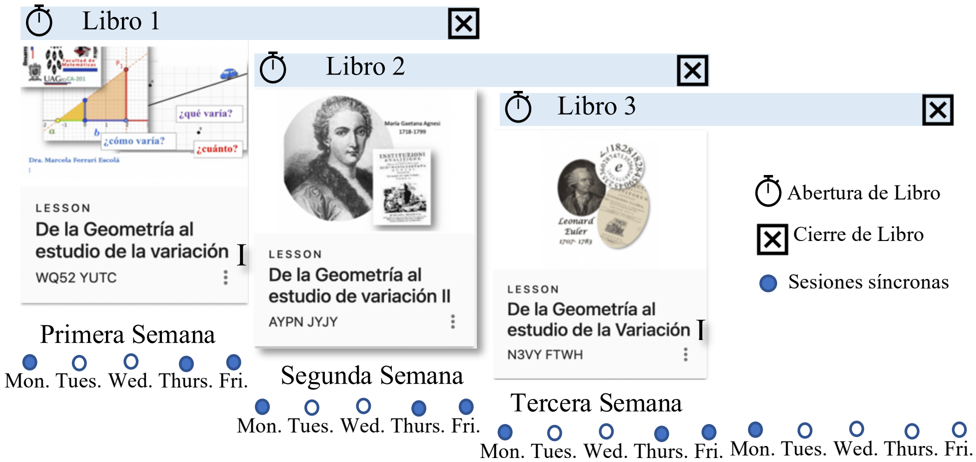
Las sesiones por la plataforma zoom fueron videograbadas y se transcribieron episodios importantes para el objetivo de la investigación. Además, se guardaron las producciones de los estudiantes (notas y construcciones geométricas) en los libros de Geogebra compartidos en el classroom de esta comunidad. En este trabajo se retoma información de tres estudiantes que discuten sobre argumentos geométricos para la construcción de la función exponencial con base 3. Los informantes se identifican como E1, E2 y E3 asignándole la letra P al profesor, autor principal de este reporte.

El análisis de los datos se realizó con la discusión de los argumentos geométricos que generaban los tres informantes, se comparó los trabajos realizados en las notas del classroom de Geogebra, con la explicación que ofrecían en las sesiones síncronas. Primero, los autores de este trabajo de forma autónoma analizaban a cada sujeto y su desempeño, y después se discutían dichos análisis en sesiones semanales para hacer un cruce de información.

Trayectoria hipotética de aprendizaje

En el experimento de enseñanza se trazó una trayectoria hipotética de aprendizaje en tres etapas. Para cada etapa se diseñó un libro de GeoGebra con reflexiones escritas, espacios para construir, applet de exploración, notas para reportar ideas, preguntas para reflexionar y vídeos de explicación (Figura 1).

Figura 1. *Organización de las etapas.*

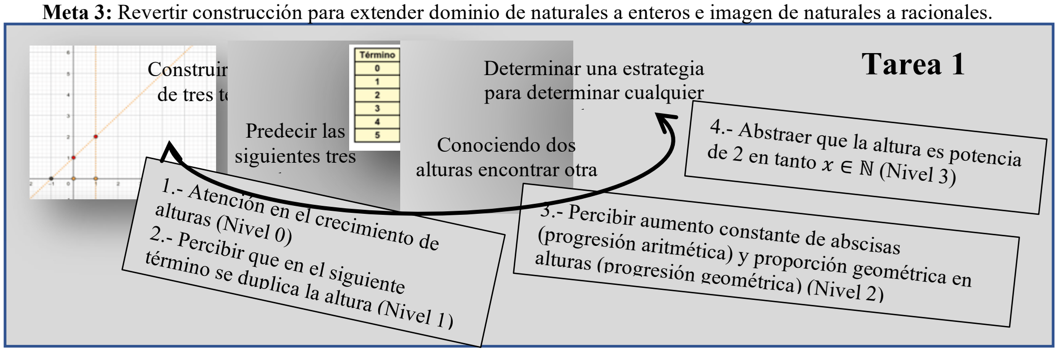


Fuente: elaboración propia.

En este reporte, sólo presentaremos un primer análisis de la producción de tres de los participantes, en tareas del primer libro (Figura 2) y, en particular, el desafío final donde se les solicitaba que construyeran geométricamente 3^n.

Figura 2. *Síntesis del libro 1.*

Objetivo: Construcción de 2^n con $n \in \mathbb{Z}$ **Libro 1**
Meta 1: Leyes de los exponentes como estrategia para construir más puntos
Meta 2: Convención matemática (0,1) versus las leyes en crecimiento: $k2^n$
Meta 3: Revertir construcción para extender dominio de naturales a enteros e imagen de naturales a racionales.

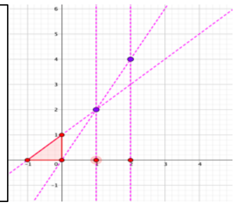


Fuente: elaboración propia.

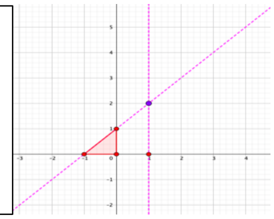
La construcción geométrica disparadora del experimento de enseñanza (Figura 3) se fundamenta en el libro de Agnesi: *Instituzioni Analitiche ad uso della gioventù italiana* publicado en 1747. Esta construcción invita a construir una serie de triángulos rectángulos semejantes que siempre tengan la misma proporción entre los lados horizontales, lo que redunda en el crecimiento proporcional de los lados verticales, es decir, generan una progresión geométrica comandada por el desplazamiento lineal de los triángulos.

Figura 3. *Síntesis de construcción de puntos.*

- Particionar el eje x con $\Delta x = 1$
- Trazar triángulo rectángulo (0,0), (-1,0) (0,1)
  Extender hipotenusa e intersectar con vertical por (1,0) generando un triángulo semejante



- Recorrer la construcción de triángulos rectángulos semejantes
- Mantener constante la subtangente, es decir, la medida de las dos bases de los triángulos (1:2)



Fuente: elaboración propia.

Resultados

En la primera sesión de trabajo, en la sala zoom general, el profesor inicia la discusión de la construcción de los puntos de la curva en el applet de GeoGebra y va indicando a los estudiantes cada trazo a realizar. Se les solicita predecir la siguiente altura, y es E1 el primero en percibir la sucesión 1, 2, 4, 8, 16 (Extracto 1).

Extracto 1: *se va multiplicando*

E1*: Va 1, 2, 4, 8 ya después el siguiente 16*

P: *¿por qué 16?*

E1: *Porque se va multiplicando por 2 la altura anterior, por eso tenemos 1 por 2 es 2, 2 por 2 es 4, por 2 es 8 y por 2 es 16*

Observamos que E1 se enfoca, al igual que sus compañeros, en predecir el valor de la siguiente altura ya que la posición de esta es inmediata al ser una instrucción directa de ir moviéndose uno a uno al construir nuevos triángulos. Argumento que es aceptado por el grupo por lo que consideramos que da evidencia de que se encuentran en un nivel 0 de razonamiento covariacional: *sin coordinación*.

Para propiciar la discusión de la propuesta de E1, se abren dos salas de zoom de 5 estudiantes. Unos minutos después, le comentan al profesor: “mágicamente llegamos a que es la ecuación 2^x”(E2) siendo cuestionados para argumentar su respuesta (Extracto 2)

Extracto 2: *es potencia de 2*

E3: *por la observación* 2^0 *es 2…*

E2: ***Si*** $\mathbf{2^0}$ ***es 1,*** $\mathbf{2^1}$ ***es 2, y así progresivamente,*** $\mathbf{2^4}$ ***es 16***

E3: *ajá,* 2^5 *es 32*

E2: *el sustento, tiene que haber realmente algo geométrico, […]*

P: *[…] la idea es ver si funciona, si les funciona ¿por qué?*

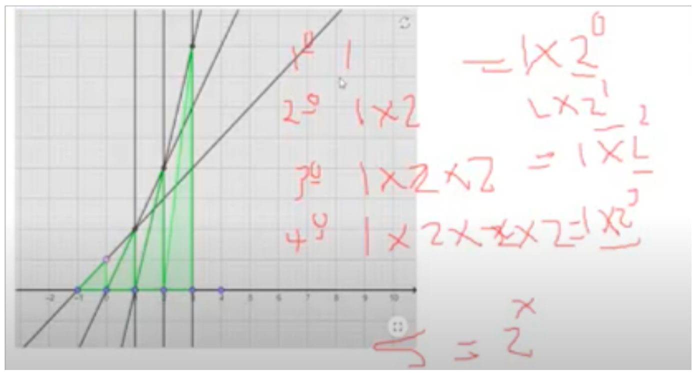
E1*:* ***porque es la sucesión del 2… de la potencia del 2***

E1, E2 y E3 consideran que el crecimiento de las alturas responde a potencias de dos, sin prestar atención en la posición, es decir, se enfocan en una sola variable. Otro estudiante (E4), utilizando la herramienta “anotar” de zoom, comparte su explicación (Extracto 3) incorporando la idea de "x" como lo que varía; asociándolo a la cantidad de veces que se multiplica por 2 pero no relacionándolo a la construcción geométrica o a la partición de la horizontal.

Extracto 3: *lo que no varía*

E4; *¿cuál es el primer lado? Es 1 ¿no?, en el caso de 1, pero en el segundo caso es 1 por 2, porque se hace 2, […] entonces si lo simplificamos es 1 vamos a decir que se multiplicó por 2 pero a la 0, entonces el otro es 1 por* 2^1, *igual este por* 2^2 *y este es igual a 1 por* 2^3, *pero como el 1 no afecta entonces nos quedamos con todo esto y en este caso* ***¿cuál es lo único que no varía? es el 2 pero lo que sí varía es lo de arriba, entonces llamémoslo X y así es como lo obtenemos***.

Figura 4. *Explicación de E4 sobre lo que no varía.*



Fuente: producción del estudiante E4.

Esta explicación no conforma a nuestro informante E2 como demostración y propone utilizar para esta tarea "*las distancias de las bases de los triángulos*", en tanto E4 propone demostrarlo "*por inducción matemática*". Ideas que no prosperan al interesarse en estudiar las rectas inclinadas que generan los puntos dejando de visualizar la semejanza de triángulos que provoca este tipo de crecimiento. Comienzan a percibir que no basta con conocer el patrón de crecimiento de las alturas para demostrar que se trata de la potencia de base 2 (Extracto 4).

Extracto 4: *hallar un patrón*

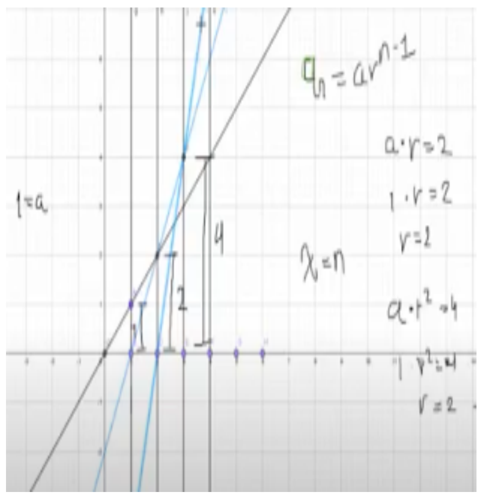
E2*: […]el problema que tenemos que* ***hallar es un patrón aquí*** [señala con una flecha la construcción geométrica], ***no solo decir los patrones que encontramos con las distancias de aquí*** [señala cada una de las alturas construidas], *es decir que aquí mide 2, aquí mide 4, aquí 8,* ***no sólo ese patrón es válido sino los patrones de esta recta*** [indica con el cursor la primera recta inclinada de la construcción]...

En la segunda sesión, en su búsqueda por describir analíticamente la construcción de puntos, comienzan a utilizar la fórmula de una sucesión geométrica $a_n = ar^{n-1}$ que propusiera E1 (Extracto 5). E2 considera necesario consensuar quien es "n" y propone $x = n$, variable que comienza a ser vinculada con la partición de la recta horizontal. Sin embargo, rehacen la construcción iniciando en (0,0) por lo que se pierde la convención matemática (0,1) como punto en la curva estudiada. Observamos que el grupo incursiona en el nivel 1 (*precordinación de valores*) pues cuantifica el cambio de los valores pudiendo determinar la siguiente abscisa por un lado y la siguiente ordenada por otro al incorporar el plano cartesiano en la construcción geométrica.

Extracto 5: *n es x*

E2: […] si podemos usar la ecuación que decía[…](E1), la de $a_n = ar^{n-1}$ *, donde* ***si hablamos quién es n entonces lo definimos como el intervalo, es decir, cuánto vale el valor de X*** *pues, X va a ser el valor de X, entonces… como tenemos que* ***la primer distancia del triángulo es 1, entonces sería nuestra variable****, este 1 sería igual a "a" y como el siguiente número sería 2, entonces usando la misma variable "a" sería "a" por algún número "b" igual a 2… entonces, bueno vamos a ponerle r, entonces …* ***entonces a sería 1 por algún número de r sería 2,*** *entonces 1*r=2, bueno en pocas palabras r sería igual a 2,* ***y entonces como la tercera distancia va a ser 4, y así sucesivamente*** *tenemos que "a" por la anterior, que sería, […] sería 4, tendríamos que se sigue cumpliendo,* ***esto vale uno y esto vale*** $\boldsymbol{r^2}$***, esto tiene que ser que r valga 2, y así sucesivamente se sigue cumpliendo****.*

Figura 5. *Explicación de E2.*



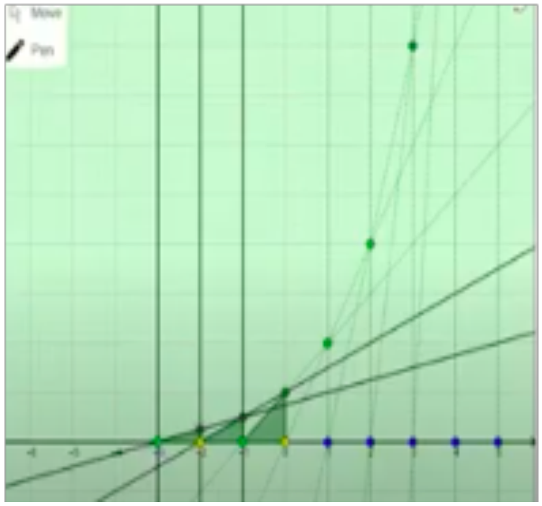
Fuente: producción del estudiante E2.

Consideramos que los informantes incursionan en el nivel 2*: coordinación burda de valores* ya que perciben que ambas cantidades aumentan a diferente ritmo. Una, sigue la partición del eje x donde emergen las alturas en tanto que éstas creces duplicando la anterior. Rápidamente descubren cómo construir puntos hacia la izquierda siguiendo el proceso propuesto por Agnesi (Extracto 6), lo cual podría dar evidencia de que han abstraído el objeto multiplicativo que implica el nivel 3: *Coordinación de valores*, es decir, son capaces de determinar cualquier punto de la construcción, en el mundo de los números racionales.

Extracto 6: *sigue el mismo patrón*

E4*: […]* ***porque sigue el mismo patrón de 2^n****, por ejemplo, ahorita el que fue el anterior sería 2^n a la -1 y 2^n a la -1 sería un medio y ahí está la altura es un ½*

Figura 6. *Construcción de puntos hacía la izquierda.*



Fuente: producción del estudiante E4.

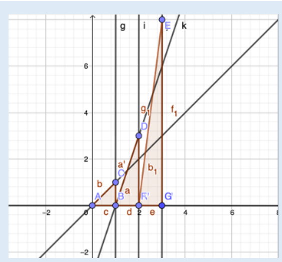
Argumentos sobre cómo construir 3^n

La meta de la trayectoria hipotética de aprendizaje del primer libro fue que los participantes desarrollaran razonamiento covariacional logarítmico exponencial, en el ámbito discreto, desde una construcción geométrica, considerando que profundizarían el nivel 3 al desafiarlos a construir geométricamente 3^n. Se les solicitó que, de manera asíncrona, resolvieran la actividad. E1, E2 y E3, los informantes de este reporte son los que presentan ideas interesantes para analizar por lo que se les invitó, en la sesión síncrona, a explicar a sus compañeros la solución que proponen.

Argumentos de E1

En el libro de GeoGebra encontramos una afirmación de E1 que no se ajusta a la gráfica que propone. La inspección del protocolo de construcción de GeoGebra confirma que se determinaron los puntos y luego se trazaron las rectas involucradas siendo “altura más la mitad de la altura” el argumento escrito.

Tabla 2. *Producción de E1.*

Producción asíncrona	
Escrito	**GeoGebra**
Se traza una perpendicular en cada punto de x, luego formamos el primer triángulo el cual tiene base=lado=1, trazamos una pendiente que esta al punto de su altura + la mitad de su altura, y seguimos este procedimiento	

Fuente: elaboración propia.

En la sesión síncrona, E1 proyecta su pantalla de GeoGebra y construye el triángulo inicial utilizando los puntos (0,0), (1,0) y C = (1,1). Luego, explica (Extracto 7) su idea de cómo construir puntos de la curva.

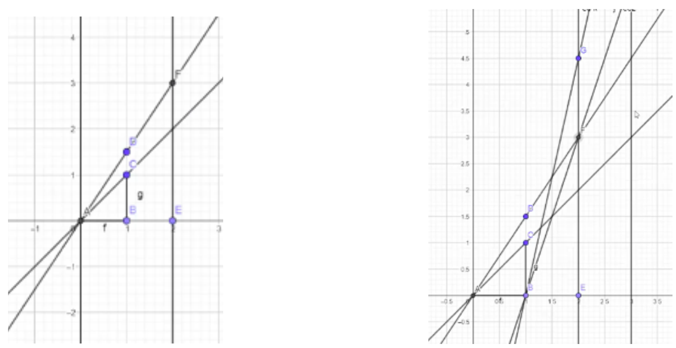
Extracto 7: *La altura más la mitad.*

P: *[...] y el D ¿cómo salió ese punto?*

E1: ***Yo encontré que es la altura más la altura de la mitad, o sea 1 más ½*** [...se le pregunta cómo construir el siguiente punto]

E1: […] ***tendríamos que sacar otra vez la recta del punto anterior que sería B con el nuevo punto****, ahora pues hacemos lo mismo ¿no? que la altura es 3 más 3/2 que sería 4.5 tendríamos un nuevo punto que sería (2, 4.5) trazamos otra vez la recta y como se ve en el siguiente punto es… déjeme pongo la… es x es igual a 3 lo subimos y aquí está el punto 9 y así me fui yendo.*

Figura 7. *Construcción de* 3^n *de E1.*



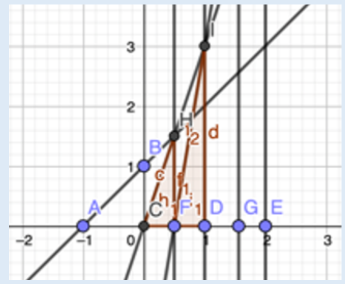
Fuente: producción del estudiante E1.

E1 propone la construcción de puntos mediante rectas de mayor pendiente que la que pasa por el punto conocido de la curva. Comenta que basta ir agregando la mitad de la altura del punto anterior y trazar la recta para hallar el siguiente punto a una distancia unitaria. No repara en que su idea tiene que ver con la construcción de triángulos semejantes de razón 1:2 lo cual convierte su construcción en la duplicación de un elemento auxiliar. Si bien logra construir puntos de la curva 3^n no logra triplicar la altura del punto anterior.

Argumentos de E2

En el libro de GeoGebra, E2 presenta (Tabla 3) una idea similar a la de E1 e intenta rescatar elementos de la construcción de Agnesi de tareas anteriores. En su explicación menciona la incorporación de elementos auxiliares (Extracto 8) que corresponden a la partición del eje horizontal y rectas que generan puntos particulares que coadyuvan en la búsqueda de puntos pertenecientes a la curva en cuestión.

Tabla 3. *Producción de E2.*

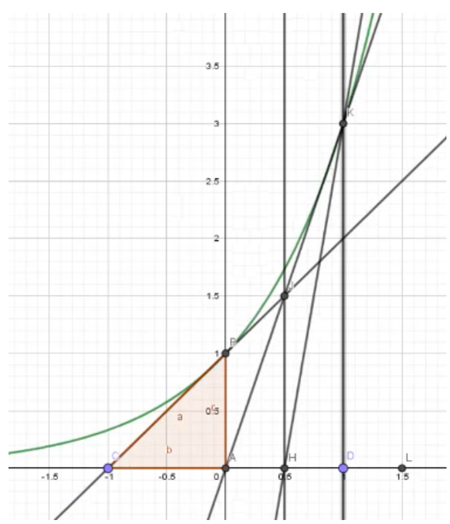
Producción asíncrona	
Escrito	**GeoGebra**
Lo que hice fue similar al recetario de Agnesi, pero ahora usaremos los puntos medios de los enteros para usarlo como punto de apoyo donde ese punto no pertenecerá a la curva, pero los enteros sí. Observamos por la misma idea del recetario Agnesi seguimos que continúa la semejanza de triángulo, ya que sigue con la recta son en 3 puntos colineales y que siempre en los enteros son una recta perpendicular.	

Fuente: elaboración propia.

Extracto 8:

E2: […]… aquí tengo la función sólo la grafiqué para que de ahí partiéramos, pero sabemos que vamos a iniciar en este primer triángulo… yo tengo la idea de que partamos con esta recta que se inscribe de -1 a 1 algo similar como 2^x*, y encontremos la intersección del punto… esta intersección* [punto J] *pero esta intersección es con el punto medio de x* [se refiere al punto H] *se puede decir, de 0 a 1 el punto medio es 0.5 … trazo su perpendicular y éste* [primer punto intersección J] *va a ser su punto… este punto lo vamos a utilizar como lo hacíamos en el pasado,* ***ponemos una recta y ahora sí con el 1*** [se refiere al punto D] ***vamos a encontrar la intersección que nos interesa*** *que va a ser éste punto* [segundo punto intersección K] ***que está sobre la curva****, entonces en pocas palabras es el mismo proceso, nada más que ahora* ***usamos el 0.5 como apoyo****, no representa nada en la gráfica… lo usamos como apoyo para crear el punto que sí está en la gráfica que es en los naturales o en los enteros…*

Figura 8. *Construcción geométrica de E2.*



Fuente: producción del estudiante E2.

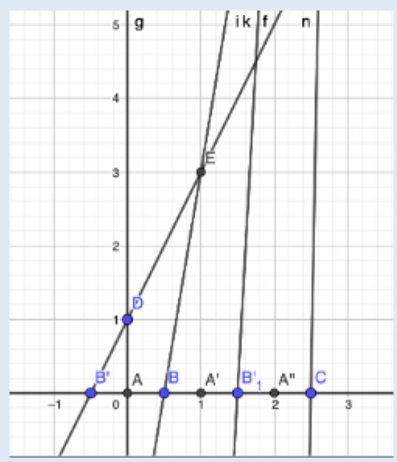
Para su explicación E2 primero gráfica la curva perteneciente a 3^x, después continua con la construcción de puntos auxiliares donde el primer punto (0,0.5) le permite construir una segunda recta que al intersectar con la recta $x = 1$ genera un punto que pertenece a la curva en cuestión.

Al igual que E1, en la construcción de E2 hay una construcción de la duplicación de elementos auxiliares. El no razonar sobre las implicaciones geométricas de la construcción anterior de 2^x, su argumento se basa en la búsqueda de puntos que satisfagan la gráfica de la función que conocen previamente.

Argumentos de E3

E3 demuestra en su producción (Tabla 4) haber abstraído la esencia de la covariación logarítmica exponencial ya que argumenta desde la construcción de los triángulos semejantes respetando la proporción constante. Es decir, afirma que la partición del eje horizontal, que determina la base de los triángulos, debe ser constante, en este caso particular de base 3 el primer triángulo debe tener base 0.5 y el triángulo semejante 1.5 (Extracto 9).

Tabla 4. *Producción de E3.*

Producción asíncrona	
Escrito	**GeoGebra**
Observé la estrategia de la primera progresión geométrica con la generalización que era 2^n, siendo n el término de la altura a conocer. Propuse que la **base de los triángulos semejantes es constante,** y era eso a descubrir, pues el procedimiento era similar. Dígase que la base sea de longitud 0.5, y que las rectas trazadas sean $x = i, \quad i = 1,..,m.$ Las intersecciones de las perpendiculares con la recta, que es parte de la hipotenusa del triángulo es un punto que pertenece la función 3^x. **Se puede observar que, al obtener una progresión geométrica, donde la función c^n, donde c sea una constante y n el término, cumple la misma idea de la semejanza de triángulos, donde la base no varía, y la altura progresivamente va a aumentando**	

Fuente: elaboración propia.

Idea que refuerza en la sesión síncrona al explicar construyendo en GeoGebra los triángulos semejantes necesarios para determinar puntos de la función 3^x

Extracto 9: *Base constante de los triángulos*

E3: hice la misma idea de ***tener una base constante de los triángulos y la base constante sería 0.5,*** *lo que hice en lugar de empezar en 1, empezar en 0.5 y trazar líneas perpendiculares, por ejemplo x a la uno, o a la dos… después de trazar las perpendiculares,* ***las perpendiculares las trazo de uno en uno, estas perpendiculares las voy a intersecar con las hipotenusas de los triángulos,*** *no hice el punto auxiliar que hizo [E1] ahí sí me confundí, porque yo empecé desde el 0.5 y trace la hipotenusa con la intersección en el eje Y, y seguí el mismo ejemplo pero con una base distinta en los triángulos*

A diferencia de E1 y E2 quienes no se cuestionaron sobre el primer triángulo rectángulo unitario, E3 inicia cambiando las bases de este para que la proporción sea 3 (Extracto 10). Idea que generaliza para otros casos.

Extracto 10: *La base inicial disminuye la altura aumenta*

P: ***y … ¿por qué te diste cuenta de cambiar la base?***

E3: ***Más o menos me fui guiando de las actividades anteriore****s de la que había un* 3^n *bueno de la altura que estábamos checando, más o menos me fui viendo ahí lo de los exponentes de la base 3, más o menos de ahí me di una idea de ver lo diferente que podrían ser los exponentes y no sé, como que cambie la base,* ***si la base la disminuyo proporcionalmente la altura puede aumentar***

Conclusiones

La importancia de argumentos geométricos en la génesis del cálculo ha ido desapareciendo a la par de ir fortaleciendo los argumentos rigurosos del álgebra. Argumentar desde lo aritmético o algebraico, no provocó problema en los estudiantes, pero hacerlo desde lo geométrico, generó dudas y debates entre ellos.

Los tres estudiantes logran abstraer la covariación logarítmica exponencial sin embargo consideramos que sólo E3 alcanza el nivel 4: *covariación continúa fragmentada* al generar explicaciones sobre cómo generalizar la construcción geométrica para otras bases cuestionando la proporción de los triángulos semejantes. E1 y E2 no reflexionan sobre la importancia de la subtangente constante como disparador de la base de la función exponencial. Sin embargo, logran construir puntos de potencias de otras bases incorporando un elemento auxiliar que, al duplicar logran la altura necesaria pues mantienen la proporción 1:2 en la base de los triángulos; argumento que rompe el patrón de crecimiento único logrado por E3. Si bien los tres informantes reconocen la función exponencial desde la primera tarea, E1 y E2 no logran desprenderse de fórmulas conocidas y de la gráfica de la curva para generar argumentos lejos de una reflexión geométrica.

Referencias bibliográficas

Agnesi, M. (1748). *Instituzioni analitiche ad uso della gioventu italiana*. Milano, Italia: Nella Regia Ducal Corte.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Gedisa.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(1), 66–86.

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Dogan, M. F., & Amidon, J. (2016). An exponential growth learning trajectory: Students' emerging understanding of exponential growth through covariation. *Mathematical Thinking and Learning*, *18*(3), 151–181.

Ferrari-Escolá, M., Martínez-Sierra, G., & Méndez-Guevara, M. E. M. (2016). "Multiply by adding": Development of logarithmic-exponential covariational reasoning in high school students. *The Journal of Mathematical Behavior*, *42*(June), 92–108.

Ferrari, M. (2008). *Un acercamiento socioepistemológico a lo logarítmico: de multiplicar sumando a una primitiva*. México: Research Centre of Advanced Studies of the National Polytechnic Institute (Ph.D. Dissertation).

Ferrari, M. & Farfán, R.M. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13(4-I), 53-68.

Fowler, S., Cutting, C., Fiedler, S.H.D & Leonard, S.N. (2022). Design-based research in mathematics education: trends, challenges and potential. *Mathematics Education Research Journal.* https://doi.org/10.1007/s13394-021-00407-5

Glassmeyer, D., Smith, A. & Gardner, K. (2020). Developed teacher content understanding by integrating pH and logarithmic concepts. School Science and Mathematics, 120, 165-174.

Gruver, J. (2018). A trajectory for developing conceptual understanding of logarithmic relationships. Journal of Mathematical Behavior, 50, 1-22.

Kuper, E. y Carlson, M. (2020). Foundational ways of thinking for understanding the idea of logarithmic. *Journal of Mathematical Behaviour*, 57, 1-18. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100740

Siller, H.S., Elschenbroich, H.J., Greefrath, G. y Vorhölter. (2022). Mathematical modelling of exponential growth as a rich learning environment for mathematics classrooms. ZDM-Mathematics Education.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267–307). Hillsdale, NJ: Erlbaum

Thompson, P. W. (2008). Conceptual analysis of mathematical ideas: Some spadework at the foundations of mathematics education. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sépulveda (Eds.), *Plenary paper delivered at the 32nd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 31–49). Morelia, México.

Thompson, P. W., & Carlson, M. (2017). Variation, covariation and functions: Foundational ways of mathematical thinking. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Trejo Martínez, M., Ferrari Escolá, M. & Martínez Sierra, G. (2021). Covariación Logarítmico-Exponencial en futuros profesores de matemáticas. Un estudio de caso. *Educación Matemática*, 33(1), 41-70.