VOL 36, NÚMERO 2, AÑO 2024

MOVILIZACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES A PARTIR DE CONTEXTOS DE MODELADO MATEMÁTICO

MOBILIZING SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS BY USING EDUCATIONAL CONTEXTS OF MATHEMATICAL MODELING

Guillermo Enrique Ramírez Montes
Universidad de Costa Rica. (Costa Rica)
guillermo.ramirez_m@ucr.ac.cr

Resumen:
Este estudio es parte de otro estudio investigativo más amplio, visa analizar la aplicación de tareas de modelado matemático en un curso de álgebra lineal de la Universidad de Costa Rica, para el fomento de la aplicabilidad de los conceptos matemáticos a partir de contextos extra matemáticos y el desarrollo de competencias asociadas al proceso de modelación. Dos grupos de estudiantes universitarios trabajaron las tareas en diferentes semestres. El estudio sigue un abordaje cualitativo-interpretativo. La recolección de los datos incluyó las resoluciones digitales del trabajo realizado por los estudiantes respecto a las tareas implementadas. En particular, este estudio se enfoca en el análisis de resoluciones de una de las tareas, asociada a flujos, a fin de identificar competencias de modelación y dificultades evidenciadas por las personas estudiantes. Los resultados revelan competencias para construir modelos matemáticos en ambos grupos y dificultades centradas en la interpretación y validación de resultados matemáticos.

Palabras clave: álgebra lineal, educación universitaria, modelación matemática

Abstract:
This study is part of a broader research study. It is aimed at analyzing the application of mathematical modeling tasks in a linear algebra course at the University of Costa Rica, for the promotion of the applicability of mathematical concepts from extra-mathematical contexts and the development of skills associated with the modeling process. Two groups of undergraduate students worked on the tasks in different semesters. The study follows a qualitative-interpretative approach. The data collection includes the digital resolutions of the work done by the students, concerning the implemented tasks. In particular, this study focuses on the analysis of resolutions of one of the tasks, associated with flows, in order to identify modeling competencies and difficulties evidenced by students. The results reveal competencies to build mathematical models in both groups and difficulties focused on interpreting and validating mathematical results.

Keywords: linear algebra, undergraduate education, mathematical modeling

Introducción

El álgebra lineal constituye una de las disciplinas fundamentales en la formación matemática de estudiantes que cursan carreras como las ingenierías, ciencias económicas y algunas ciencias exactas como Matemática y Física, aportando herramientas necesarias para cursos más avanzados de su plan de estudio (Cárcamo, Gómez, & Fortuny, 2016). Además, el conocimiento de los diferentes conceptos y herramientas que ofrece el álgebra lineal permite a la persona estudiante poder modelar matemáticamente situaciones del contexto real, tales como los flujos asociados a sistemas dinámicos, por ejemplo, mediante el uso de sistemas de ecuaciones lineales (Costa & Rossignoli, 2017).

Ahora bien, el aprendizaje del álgebra lineal representa un gran desafío para la persona estudiante, cuya causa está asociada al carácter abstracto y formal con que se abordan los diferentes conceptos con que ésta es confrontada a trabajar (Rach & Heinze, 2017); en particular, la no contextualización de los conceptos matemáticos en contextos extramatemáticos (Costa & Rossignoli, 2017).

Ante la necesidad de hacer frente a la abstracción de los conceptos matemáticos referida; la escasez de estudios en el contexto costarricense enfocados en la aplicabilidad de los conceptos y fomento de competencias de modelación para el aprendizaje de conceptos del álgebra lineal; y la necesidad de más estudios a nivel de educación universitaria enfocados en procesos de aprendizaje matemático (Rach & Heinze, 2017), en este estudio se recurre a los ambientes de modelación matemática. Los desafíos de la modelación matemática son de naturaleza distinta a los desafíos de otros tipos de tarea, requiriendo capacidades de mayor exigencia que permiten diagnosticar competencias matemáticas y dificultades con que se enfrenta la persona estudiante al trabajar los conceptos matemáticos con contextos extramatemáticos (Czocher, 2018).

Por tanto, este estudio se encamina en la perspectiva de modelación educacional (Kaiser & Sriraman, 2006) como línea de investigación, y visa caracterizar los procesos de modelación desarrollados por dos grupos de estudiantes universitarios, cuando trabajan una tarea de Modelación la cual requiere movilizar sistemas de ecuaciones lineales en contextos de flujos.

Específicamente, el estudio visa responder a las siguientes interrogantes: ¿qué competencias de modelación evidencian las personas estudiantes al movilizar sistemas de ecuaciones lineales (SEL) en un ambiente de modelación matemática? ¿qué dificultades son manifestadas o evidenciadas en las personas estudiantes al resolver la tarea de modelación?

En las siguientes dos secciones se abordan los constructos teóricos que fundamentan este estudio, incluyendo potencialidades y dificultades asociadas al uso de ambientes de modelación para el aprendizaje del álgebra lineal.

Enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal y el caso particular de los sistemas de ecuaciones lineales

En los últimos años las investigaciones en torno a la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal han venido en aumento (Trigueros & Bianchini, 2016). Tal es así la importancia de esta área de conocimiento de la Matemática que algunos grupos de investigación se han formado para abordar temáticas ligadas a la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal, algunos recientes como el Grupo de Investigación en Educación Algebraica en Brasil (Bianchini et al., 2019) y otros más antiguos como el Grupo de Estudio en el Currículo del Álgebra Lineal (Carlson et al., 1993). Este último establece algunas recomendaciones curriculares para el mejoramiento de la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal que aun en la actualidad es importante considerar, entre estas, considerar ejemplos de aplicaciones que cubran la mayor parte de los campos de estudio relacionados con la carrera de formación del estudiantado y usar el recurso de la tecnología para apoyar los procesos de cálculo y de comprensión de los conceptos en estudio.

De estas recomendaciones se desprende la importancia del contexto real como componente para ayudar en el mejoramiento del aprendizaje del álgebra lineal y, consecuentemente, ayudar a que la persona estudiante supere algunas dificultades asociadas al enfoque formal, basado en axiomas y pruebas matemáticas, con que se enfrenta por primera vez en un curso elemental de álgebra lineal.

En lo que respecta a estudios previos sobre SEL, encontramos el estudio de Mallet (2007), quien trabaja sobre una propuesta de enseñanza fundamentada en el uso de representaciones visuales, algebraicas y tabulares, utilizando el software Maple. El estudio buscó ayudar al estudiantado a comprender lo que son los SEL y lo que se entiende por solución y conjunto solución de un SEL. Los resultados de Mallet (2007) revelaron que las representaciones visuales en conjunto con el uso del software y el uso de representaciones algebraicas ayudaron al estudiantado a darle significado al conjunto solución de un SEL. Sin embargo, los resultados de este estudio también revelan la necesidad de una mayor exploración de las representaciones tabulares, ante la dificultad que presenta el estudiantado para hacer conexiones con las representaciones algebraicas y visuales. Además, el autor enfatiza que, cuando la persona estudiante obtiene un conjunto solución con infinitas soluciones usando solo la representación algebraica, la comprensión sobre el conjunto obtenido es débil, debido a cierta dificultad que la persona estudiante tiene para comprender los vectores solución parametrizados que configuran este tipo de solución.

Por su parte, en la línea de estudios usando ambientes de modelación encontramos el estudio de Possani et al. (2010), en el contexto de flujo de tránsito vehicular. Los autores plantean una tarea de modelación donde el estudiantado debe encontrar posibles valores de flujo en trayectos donde se desconoce el flujo, a modo de predecir el comportamiento del tránsito en cierta región. Los resultados del estudio de Possani et al. (2010) revelan que el contexto propuesto en la tarea fue significativo para el estudiantado, permitiéndoles reflexionar sobre diferentes conceptos asociados al estudio de SEL, y al mismo tiempo la tarea fue catalogada de alta exigencia cognitiva, en comparación con tareas tradicionales basadas en la resolución de ejercicios en contextos intramatemáticos.

Competencias de modelación y dificultades asociadas al proceso de modelación

Diferentes definiciones se pueden encontrar en la literatura para el término de competencia de modelación (Maaß, 2006). En lo que respecta a este estudio, se considera la definición de Maaß (2006), la cual define a una competencia de modelación como “habilidades y capacidades para realizar procesos de modelación apropiadamente, y orientado a objetivos específicos, y la voluntad de ponerlos en práctica” (p. 117). Dichas competencias de modelación se pueden clasificar en subcompetencias, conforme a la siguiente tabla.

Tabla 1. *Competencias de modelación matemática y procesos de modelación asociados.*

Subcompetencias de modelación	Competencia para…	Subprocesos cognitivos
Comprender la situación real y plantear un modelo basado en la realidad.	Hacer suposiciones sobre la situación y simplificar la situación; reconocer cantidades que influyen en la situación; identificar variables clave; construir relaciones entre las variables; buscar información disponible y diferenciar entre información relevante e irrelevante.	(1) Comprender la tarea. (2) Simplificar/ estructurar la tarea.
Construir un modelo matemático a partir del modelo real.	Matematizar cantidades relevantes y sus relaciones; simplificar las cantidades relevantes y sus relaciones si es necesario y reducir su número y complejidad; elegir notaciones matemáticas apropiadas y representar situaciones gráficamente.	(3) Matematizar el modelo.
Resolver cuestiones matemáticas con el modelo matemático.	Utilizar estrategias heurísticas como la división de la actividad en actividades parciales; establecer relaciones con productos similares o análogos; ver el problema de otra forma, variar las cantidades o los datos disponibles; utilizar conocimientos matemáticos previos para resolver la situación a partir del modelo construido.	(4) Trabajar matemáticamente sobre el modelo.

Interpretar resultados matemáticos en la situación real.	Interpretar resultados matemáticos en contextos extra-matemáticos; generalizar soluciones que fueron desarrolladas para una situación especial; dar soluciones a la situación problema usando lenguaje matemático apropiado y/o para comunicar sobre las soluciones.	(5) Interpretar resultados matemáticos.
Validar la solución.	Revisar críticamente y reflexionar sobre las soluciones encontradas; revisar algunas partes del modelo o volver a pasar por el proceso de modelación si las soluciones no se ajustan a la situación real; reflexionar sobre otras formas de resolver la situación problema o si las soluciones se pueden desarrollar de manera diferente.	(6) Validar resultados dentro de la situación real.

Fuente: adaptado de Maaß (2006).

De la tabla 1 se observa que las subcompetencias de modelación están asociadas directamente a los subprocesos que conforman el modelo lineal de ciclo de modelación (Blum, 2015), entendido este como un proceso de modelación que sigue los pasos en el orden del (1) al (6), objetivando dar respuesta a la situación problema planteada inicialmente en la tarea de modelación. Como parte del proceso de modelación puede incluirse también el uso del recurso tecnológico para apoyar alguno de los subprocesos referidos, sin embargo, debe considerarse que las tareas de modelación propuestas al estudiantado deben hacer que estos realmente sientan la necesidad de recurrir a usar tecnología, tornándola un recurso de apoyo, más allá de un recurso posible (Greefrath et al. 2018).

En relación con la exigencia cognitiva de los ambientes de modelación, Blum (2015) enfatiza que es normal que muchos estudiantes tengan dificultades al trabajar las primeras tareas de modelación, evidenciándose comúnmente una resistencia a hacer suposiciones (simplificar y estructurar), y la mayor parte del estudiantado tiene dificultad para verificar si sus soluciones matemáticas hacen sentido en el contexto de la situación problema (validación de resultados).

En lo que respecta a estudios donde se trabaja con SEL, el estudio de Possani et al. (2010) revela dificultades en el estudiantado para estructurar/simplificar la situación problema y trabajar matemáticamente el modelo matemático, mientras que el estudio de Trigueros & Possani (2013), en un contexto de producción de plantas de manufactura, evidencia que aun cuando el estudiantado puede haber tenido experiencia trabajando SEL, el pasar a trabajar con tareas de modelación ocasiona que el estudiantado experimente dificultades para comprender y estructurar la situación problema, por lo que saber resolver SEL en contextos intramatemáticos no garantiza que la persona estudiante no presente dificultades en su proceso de modelación.

Otras dificultades asociadas al proceso de modelación, pero no necesariamente a los subprocesos referidos en la tabla 1, tienen que ver con que la persona estudiante encuentre errores donde no existen o que mude la situación problema para adaptarla a su conocimiento previo (Czocher, 2018).

Metodología

Contexto y participantes

Este estudio es parte de un estudio de investigación mayor, el cual consideró la implementación de 3 tareas de modelación en dos grupos diferentes de estudiantes de un curso de Álgebra Lineal de la Universidad de Costa Rica durante el I ciclo y II ciclo 2021, respectivamente para cada grupo. Las tareas que se trabajaron atendieron a fomentar la aplicabilidad de conceptos matemáticos correspondientes a las unidades temáticas de Matrices y Sistemas Lineales de Ecuaciones, Espacios Vectoriales y Transformaciones Lineales. Además, las tareas visaban fomentar competencias asociadas al proceso de modelación, competencias no trabajadas usualmente en la clase de un curso tradicional de Álgebra Lineal, como la interpretación y validación de resultados.

Ambos grupos de estudiantes (la mayoría de ingeniería), llevaron el curso en modalidad sincrónico virtual y bajo los mismos principios de evaluación. En el caso del primer grupo (I ciclo 2021) participaron en la resolución de las tareas 6 hombres y 6 mujeres, mientras que para el segundo grupo (II ciclo 2021) participaron 6 hombres y 4 mujeres. Todos los participantes participaron voluntariamente, accediendo a trabajar las tareas de modelación en horario fuera del tiempo de clase y sin porcentaje sumativo asociado a la nota final del curso. El trabajo de cada una de las tareas se realizó en parejas.

Cada tarea fue propuesta después de que la persona docente a cargo del grupo hubo trabajado la temática asociada a la tarea de modelación a implementar, de forma que los conocimientos matemáticos previos relativos al álgebra lineal fueran una posibilidad para que el estudiantado trabajase la tarea de modelación asociada a dicha temática. Además, la metodología propuesta en el curso estaba basada en una clase expositiva tradicional, envolviendo ejercicios de cálculo en contextos intramatemáticos y algunas demostraciones simples asociadas al álgebra lineal.

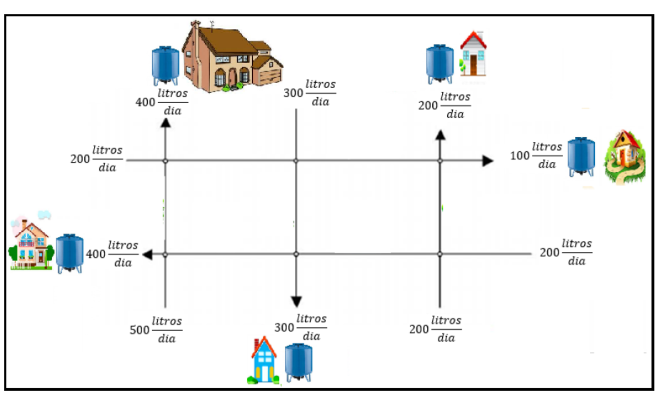
Aun cuando las tareas procuraban poner en práctica los mismos conocimientos matemáticos, los contextos usados en cada grupo eran diferentes, siendo que el objetivo de las tareas implementadas en el primer grupo visaba implementar un conjunto de tareas de modelación para mejorar aspectos a considerar en el diseño de las tareas a implementar en el segundo grupo de estudiantes.

Respecto a la tarea propuesta en este estudio, ambos grupos trabajaron una tarea asociada a la unidad temática de SEL. En el caso del primer grupo el contexto usado fue de flujos de agua por tuberías, mientras que en el caso del segundo grupo el contexto fue de flujos de tránsito vehicular.

Entre las mejoras propuestas al enunciado de la tarea del segundo grupo, producto de las resoluciones del estudiantado del primer grupo al trabajar la tarea correspondiente están: (1) sustitución del contexto de flujo de agua en tuberías por un contexto más familiar para el estudiantado, como es el contexto de fujo de tránsito vehicular en cierta zona de la capital de Costa Rica; (2) sustituir el dar datos de la situación problema dentro del texto de un enunciado por dar dicha información en forma tabular, a fin de facilitar la formulación de un modelo real; (3) reducir la cantidad de ecuaciones asociadas al SEL que se debía formular como propuesta posible de modelo matemático; y (4) señalar con flechas los sentidos de flujo en cada trayecto de la región en estudio.

En figura 1 y figura 2 se pueden observar imágenes dadas a cada grupo en el enunciado de la tarea, respectivamente, a modo de facilitar la comprensión de la misma. Al comparar ambas figuras se observan algunos de los cambios referidos en la tarea.

Figura 1. Sistema de tubería para abastecimiento de agua.



Fuente: diseño propio.

Figura 2. Tránsito vehicular en zona con cuatro intersecciones.

Fuente: diseño propio. Adaptado de captura de Google maps.

Recolección y análisis de datos

El estudio sigue un abordaje cualitativo de paradigma interpretativo (Cohen et al., 2007). La recolección de los datos incluyó las resoluciones digitales a la tarea de modelación, donde también se incluían algunas preguntas relacionadas a explicar la estrategia de resolución implementada y las dificultades percibidas al resolver la tarea.

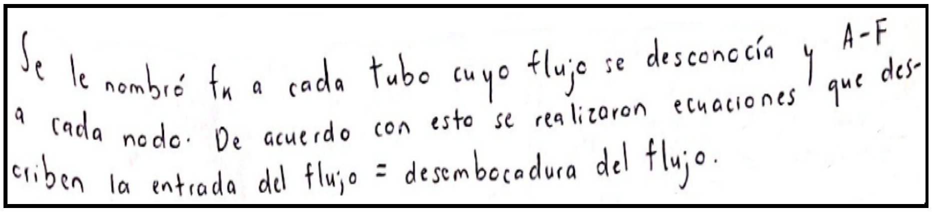
El análisis de los resultados es descriptiva e interpretativo (Wolcott, 2009), donde el investigador hace descripción de extractos de resolución del estudiantado e interpreta datos o afirmaciones, escogiendo para ello subgrupos representativos con resoluciones que marcan diferencias. El análisis se centra en las competencias de modelación que se observa que logra movilizar el estudiantado, siguiendo el modelo lineal de ciclo de modelación, y en las dificultadas que detecta el investigador en dichas resoluciones y que manifiesta la misma persona estudiante haber experimentado al resolver la tarea.

Como parte de los aspectos éticos considerados en el estudio, se pasó un consentimiento informado, el cual garantizó el anonimato de las personas estudiantes participantes y la participación voluntaria en el estudio.

Resultados

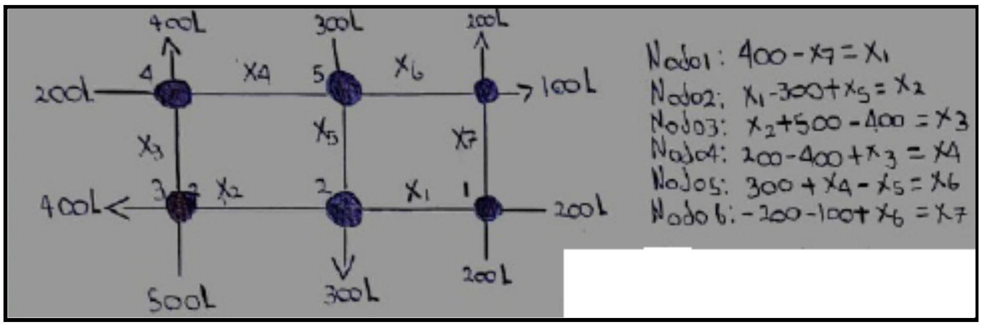
Competencias para desplazarse de la situación problema al modelo matemático fueron bien conseguidas por ambos grupos de estudiantes. Estas competencias incluyen (1) hacer suposiciones sobre la situación problema, como suponer que el total de flujo que entra por cierto punto o nodo es igual a la cantidad de flujo que sale por el mismo punto o nodo; (2) estructurar y simplificar la situación para construir un modelo real a parir de asignar variables a las cantidades desconocidas y entender la situación como un problema que se puede modelar mediante un SEL; (3) matematizar las cantidades conocidas y las variables a partir de igualdades para formar un SEL.

Figura 3. *Idealización de Alexa y Pedro.*



Fuente: extracto de resolución del grupo 1.

Figura 4. *Modelo real y modelo matemático de Esteban y María.*



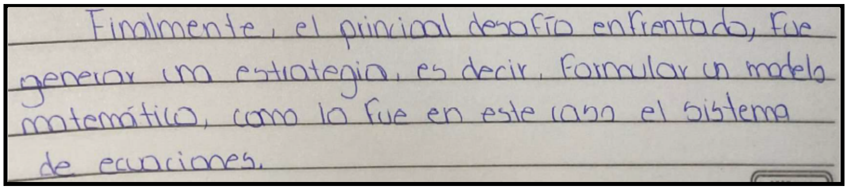
Fuente: extracto de resolución del grupo 1.

En el caso del grupo 1, el diálogo de la figura 3 evidencia que Alexa y Pedro refieren usar f_k para asignar variables a las cantidades desconocidas entre nodos, en particular, cuando refieren “se nombro f_k a cada tubo cuyo flujo se desconocía y A-F a cada nodo”, se interpreta que ellos identifican seis nodos, los correspondientes a las seis intersecciones del sistema de tuberías, etiquetadas con letras de la A a la F, y el subíndice k lo usan como un contador, para referir que existe más de una cantidad desconocida; evitando así mencionar en forma explícita las variables utilizadas. Además, la última línea de su afirmación evidencia una simplificación a la situación problema, asumir que no hay fugas en todo el sistema de tuberías.

Semejantemente en la figura 4, se evidencia como Esteban y María interpretan la situación en términos de cantidades constantes (información dada en la tarea) y cantidades variables (información por encontrar) para posteriormente matematizar la situación a través de ecuaciones que conduzcan a un SEL. A su vez, se observa el modelo matemático de estos dos estudiantes, de donde se puede interpretar que, por ejemplo, para plantear la primera ecuación consideran el flujo saliente x_1 como la suma vectorial de los flujos entrantes 200, 200 y $-x_7$. Este último flujo entrante, pues x_7 es un flujo saliente, como lo indican las flechas en su modelo real.

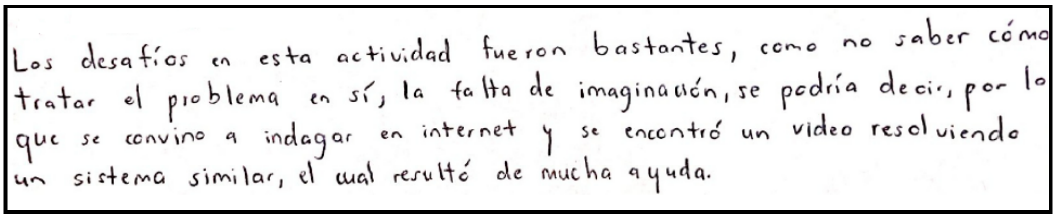
A pesar de las evidencias anteriores, al principio la mayoría de las personas estudiantes del grupo 1 manifestaron dificultades para comprender cómo trabajar la tarea, como lo deja ver la figura 5, la cual resulta de la respuesta por uno de los subgrupos a una de las preguntas solicitadas de la tarea en cuanto a dificultades percibidas.

Figura 5. *Dificultad de Cinthia y Marco.*


Finalmente, el principal desafío enfrentado, fue generar una estrategia, es decir, formular un modelo matemático, como lo fue en este caso el sistema de ecuaciones.

Fuente: extracto de resolución del grupo 1.

Figura 6. *Dificultades de Alexa y Pedro.*


Los desafíos en esta actividad fueron bastantes, como no saber cómo tratar el problema en sí, la falta de imaginación, se podría decir, por lo que se convino a indagar en internet y se encontró un video resolviendo un sistema similar, el cual resultó de mucha ayuda.

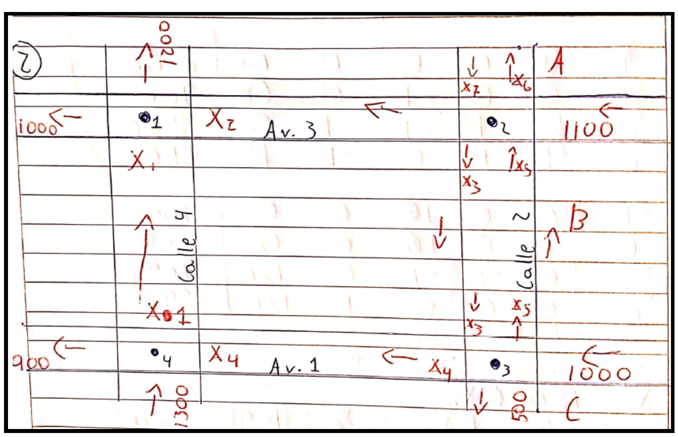
Fuente: extracto de resolución del grupo 1.

La respuesta de Cinthia y Marco, al igual que respuestas de otros subgrupos del grupo 1, apuntan hacia el haber tenido dificultad inicialmente para hacer conexiones entre la situación problema y el conocimiento matemático adquirido en el curso de álgebra lineal, no así consiguieron superar esta dificultad, a través de la discusión con la pareja o indagando en fuentes externas a los apuntes del curso, como evidencia el caso de Alexa y Pedro.

Ahora bien, en el caso del grupo 2, se realizó una adaptación a la tarea, la cual consistió en usar un contexto más cercano al estudiantado y reducir la complejidad matemática en términos de ecuaciones. Estas medidas fueron tomadas tras evidenciar las dificultades anteriores. La figura 7 muestra un extracto de resolución de estos subgrupos.

La resolución de Harry y Fernanda muestra un modelo real semejante a los usados por los subgrupos del grupo 1, en particular, uso de variables para denotar flujos desconocidos. Sin embargo, se observa que, además de tener solo cuatro intersecciones el modelo (debido a las adaptaciones de la tarea), el contexto usado sobre avenidas y calles en la capital de Costa Rica permitió que hubiese más diversidad de suposiciones/simplificaciones asociadas a la tarea, competencia que se quiso promover aún más con la tarea.

Figura 7. *Idealización de Harry y Fernanda.*

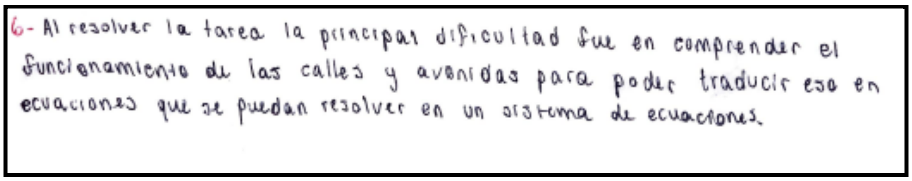


Fuente: extracto de resolución del grupo 2.

Estas suposiciones/simplificaciones implicaban considerar en los tramos de flujo desconocido sólo una dirección o doble dirección de flujo vehicular, siempre y cuando no se quitaran las direcciones de flujo dadas en la tarea para los trayectos con flujo conocido. En el caso de Harry y Fernanda se observa que hay trayectos desconocidos de flujo donde consideran solo una dirección (trayectos que respectan los sentidos reales, condición dada en la tarea) y otros donde consideran dos, haciendo que el modelo matemático sea más complejo, pues el número de sentidos de flujo tiene implicaciones directas sobre el número de variables del SEL

Respecto a las dificultades del grupo 2, en este transitar de la situación real al modelo matemático, se observan las mismas dificultades manifestadas y evidenciadas en los subgrupos del grupo 1, como se deja interpretar de la figura 8.

Figura 8. *Dificultades de Helena y Pablo.*

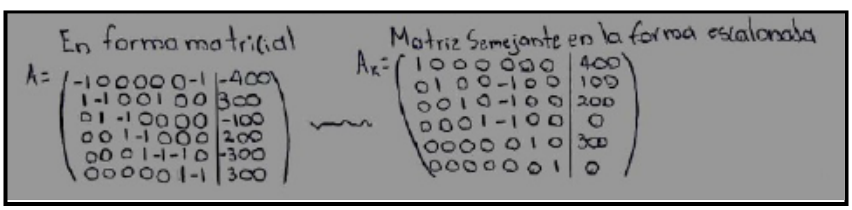

6- Al resolver la tarea la principal dificultad fue en comprender el funcionamiento de las calles y avenidas para poder traducir eso en ecuaciones que se puedan resolver en un sistema de ecuaciones.

Fuente: extracto de resolución del grupo 2.

Helena y Pablo, al igual que otros subgrupos del grupo 2, evidencian haber tenido dificultades para comprender la situación problema y esquematizarla como un modelo real. En caso particular de estos dos estudiantes se interpreta que no es que no conocieran el contexto real de calles y avenidas de la capital, sino como asociarlo con SEL; lo cual es producto de no haber trabajado previamente con tareas en contextos reales que involucren contenidos de álgebra real.

Respecto a competencias para desplazarse del modelo matemático a la situación problema nuevamente, se evidencian competencias en ambos grupos para trabajar los SEL a partir de procedimientos del álgebra lineal como el método Gauss-Jordan y a partir del uso de tecnología.

Figura 9. *Uso de tecnología por parte de Carmen y Julio para trabajar el modelo matemático.*



Fuente: extracto de resolución del grupo 1.

En la figura 9 se observa la forma matricial del modelo de SEL obtenida por Carmen y Julio. Esta matriz es llevada a su forma escalonada usando software matemático, lo cual se pudo interpretar insertando la matriz asociada al SEL en Wolfram Matemática para ver el output obtenido, correspondiente a la matriz semejante que refieren. Este hecho evidencia el uso de competencias que este subgrupo, y solo en este se evidenció, para trabajar con software matemático SEL, conocimiento adquirido posiblemente por haber trabajado con la persona docente del curso con Wolfram en sus clases previas.

Por otra parte, muy pocos subgrupos de ambos grupos evidenciaron hacer interpretaciones adecuadas de los resultados matemáticos, y solo un subgrupo del grupo 2 consigue validar resultados matemáticos.

Figura 10. *Interpretación de resultados de Helena y Pablo.*

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 3100 \\ x_2 - x_4 = -900 \\ x_3 - x_4 = -500 \\ x_4 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 3100 - t \\ x_2 = t - 900 \\ x_3 = t - 500 \\ x_4 = t \end{array} \quad t \in \mathbb{R}$$

Fuente: extracto de resolución del grupo 2.

Figura 11. *Validación de resultados de Helena y Pablo.*

$x_1 = 3100 - t = 3100 - 2000 = 1100$

$x_2 = t - 900 = 2000 - 900 = 1100$

$x_3 = t - 500 = 2000 - 500 = 1500$

$x_4 = t = 2000$

Sustituyendo en la ecuación original obtendríamos las "salidas" del flujo vehicular

$x_1 + x_4 = 1100 + 2000 = 3100 \quad \wedge \quad 3100 = 3100$

Como las "entradas" de la intersección y las "salidas" son iguales, entonces se comprueba que el flujo es constante.

Fuente: extracto de resolución del grupo 2.

De la figura 10, se observa que a pesar de que Helena y Pablo resuelven el SEL, ellos realizan una mala interpretación, asumiendo que el valor del flujo desconocido $x_4 = t$ debe ser un valor real, cuando lo adecuado debería ser $t \geq 0$. A pesar de ello Helena y Pablo validan resultados, aunque parcialmente, lo que se evidencia en la figura 11 cuando le asignan al parámetro t el valor de 2000 para obtener el valor de los demás flujos desconocidos. Las últimas dos líneas permiten interpretar que Helena y Pablo quedan satisfechas con haber obtenido flujos iguales en uno de los nodos, permitiéndoles concluir que su modelo es válido, a pesar de que lo adecuado sería haber verificado la igualdad en todos los nodos.

Conclusiones

Los resultados de este estudio han evidenciado competencias de modelación y dificultades manifestadas y evidenciadas en las personas estudiantes.

Respecto a las competencias se evidencian competencias en ambos grupos para desplazarse del mundo real al mundo matemático, pero con dificultades iniciales en la comprensión de la situación problema, conforme también presentado en el estudio de Possani et al. (2010) en el contexto de tránsito vehicular, con la diferencia de que para este estudio aquí desarrollado ambos grupos consiguen trabajar adecuadamente el modelo matemático, incluyendo competencias para trabajar con tecnología en una de las parejas de estudiantes.

En lo que se refiere a competencias para ir del mundo matemático al mundo real, escasos estudiantes consiguen hacer interpretaciones adecuadas sobre los resultados obtenidos en el conjunto solución de los SEL construidos como modelos matemáticos, y solo una pareja consigue hacer validación de resultados, a partir de evaluar casos particulares de resultados matemáticos en las ecuaciones que representan igualdades entre flujos de entrada y salida en nodos. Esto lleva al otro aspecto de interés de este estudio, identificar dificultades en el estudiantado. Estas dificultades resultan como consecuencia de que las personas estudiantes no estén acostumbradas a trabajar con contextos extramatemáticos en el curso de álgebra lineal que cursaban, pero también a no haber trabajado antes en su formación universitaria tareas con desafíos cognitivos mayores, como son las tareas de modelación matemática, respecto de tareas restringidas a ejercicios matemáticos como las trabajadas en el curso (Blum, 2015; Czocher, 2018).

Respecto a los contextos utilizados, este estudio se centró en la perspectiva educativa de modelación, mostrando una propuesta de tareas para trabajar consolidación de conceptos matemáticos mediante contextos extramatemáticos. Además, el estudio permite observar que las adaptaciones hechas a la tarea inicial implementada con el grupo 1 sirvieron para evidenciar modelos más sofisticados y variados en el grupo 2, lo que sugiere abordar más estudios que muestren las ventajas y desventajas de trabajar otros contenidos del álgebra lineal mediante adaptaciones en tareas iniciales de modelación.

Por último, es importante referir que futuras implementaciones pueden incluir una adaptación de las tareas donde se obligue más al estudiantado a usar de la tecnología en el proceso de modelación, a fin de no reducir la tecnología a simplificación de cálculos, como fue el caso de este estudio (Greefrath et al., 2018).

Referencias bibliográficas

Bianchini, B.L., de Lima, G.L., & Gomes, E. (2019). Linear algebra in engineering: an analysis of Latin American studies. *ZDM Mathematics Education*, *51*(7), 1097–1110. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01081-5

Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? In: S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education - Intellectual and Attitudinal Challenges* (pp. 73-96). New York: Springer.

Cárcamo, A., Gómez, J., & Fortuny, J. (2016). Mathematical Modelling in Engineering: A Proposal to Introduce Linear Algebra Concepts. *Journal of Technology and Science Education (JOTSE), 6*(1), 62-70.

Carlson, D., Johnson, C., Lay, D., & Porter, A. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra. *The College Mathematics Journal, 24*(1), 41-46.

Cohen, L., Manion, L., & Mohinson, K. (2007). *Research methods in education* (*6th ed.*). New York, NY: Routledge.

Costa, V. A., & Rossignoli, R. (2017). Enseñanza del álgebra lineal en una facultad de ingeniería: Aspectos metodológicos y didácticos. *Revista Educación en Ingeniería*, *12*(23), 49-55.

Czocher, J. (2018). How does validating activity contribute to the modeling process?. *Educational Studies in Mathematics*, *99*, 137–159. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9833-4

Greefrath, G., Hertleif, C., & Siller, H. (2018). Mathematical modelling with digital tools—A quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. *ZDM Mathematics Education*, *50*, 233–244. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0924-6

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, *38* (3), 302–310. https://doi.org/10.1007/BF02652813

Maaβ, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM Mathematics Education*, *38*(2), 113–142. https://doi.org/10.1007/BF02655885

Mallet, D. G. (2007) Multiple representations for systems of linear equations via the computer algebra system Maple. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *2*(1), 16–32.

Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J., & Lozano, M. D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, *432*, 2125–2140.

Rach, S., & Heinze, A. (2017). The Transition from School to University in Mathematics: Which influence do school-related variables have? *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(7), 1343–1363.

Trigueros, M., & Bianchini, B. L. (2016). Learning linear transformations using models. In E. Nardi, C. Winsløw, & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the first conference of the international network for didactic research in university mathematics* (pp. 326–336). Montpellier, FR: University of Montpellier and INDRUM.

Trigueros, M., & Possani, E. (2013). Using an economics model for teaching linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, *438*(4), 1779–1792.

Wolcott, H. (2009). *Writing up qualitative research* (3rd ed.). Oaks, CA: SAGE.