

UN ESTUDIO SOBRE LA HABILIDAD DEL PROFESOR PARA ANALIZAR EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES

A STUDY ON THE TEACHER'S SKILL TO ANALYZE STUDENTS' MATHEMATICAL THINKING

Sebastián Parodi, Cristina Ochoviet, Javier Lezama

Consejo de Formación en Educación. (Uruguay), Instituto Politécnico Nacional. (México)

parodiseb@gmail.com, cristinaochoviet@gmail.com, jlezamaipn@gmail.com

Resumen:

Se examina la habilidad para analizar el pensamiento matemático en situaciones que involucran el signo igual. Los participantes fueron futuros profesores de matemática, cursando el último año de su carrera docente, y estaban a cargo de un grupo en la escuela secundaria. Se adoptó como perspectiva teórica la mirada profesional y una categorización de los significados del signo igual. Todos los participantes asistieron a un experimento de enseñanza donde se aplicó una secuencia de actividades con el fin de analizar la forma en que interactúan y se desarrollan las habilidades profesionales de los futuros docentes. Algunas de las conclusiones indican que los participantes tienden a seguir procedimientos formales para la resolución de tareas. Adicionalmente, el análisis de las evidencias relacionadas con las habilidades de interpretar y decidir sugiere una relación de dependencia entre estas dos habilidades de la mirada profesional.

Palabras clave: conocimiento del profesor, formación docente, experimento de enseñanza

Abstract:

This research examines the skill to analyze the mathematical thinking in situations involving the equal sign. The participants were mathematics prospective teachers, studying the last year of their teaching degree course, and who were in charge of a group in secondary school. It adopted as the theoretical perspective the professional noticing, and a categorization of the equal sign meanings. All the participants attended a teaching experiment where a sequence of activities was applied in order to analyze the way in which professional skills of prospective teachers interact and develop. Some of the conclusions indicate that the participants have a tendency to follow formal procedures for solving tasks. In addition, the analysis of the evidence related to interpreting and deciding skills suggests a dependency relationship between these two skills of the professional noticing.

Keywords: teacher knowledge, teacher training, teaching experiment

■ Introducción

Estudios que exploran la comprensión del signo igual en la enseñanza media reportan una tendencia de los alumnos a interpretar el signo igual como el indicador del resultado de una operación o como una señal de hacer algo, en lugar de interpretarlo como el indicador de una relación de equivalencia, que resulta ser una interpretación imprescindible para el abordaje del álgebra (Kieran, 1981; Burgell y Ochoviet, 2015; Parodi et al., 2017, 2020; entre otros). Esta manera operacional de entender el signo igual queda en evidencia, por ejemplo, cuando los estudiantes se enfrentan a una sentencia numérica para completar (por ejemplo, Burgell y Ochoviet, 2015) o a una expresión algebraica para interpretar (por ejemplo, Parodi et al., 2020) o a una ecuación para resolver (por ejemplo, Parodi et al. 2017).

Asimismo, investigaciones que indagan sobre el conocimiento del profesor acerca de la enseñanza, en lo relativo al signo igual, señalan que los profesores no identifican que los significados de este signo representan una dificultad para los estudiantes (Stephens, 2006; Asquith et al., 2007; Prediger, 2010; Trivilin y Ribeiro, 2015; Vermeulen y Meyer, 2017; entre otros). En particular, estas investigaciones reportan dificultades de los docentes para anticipar objetivos de enseñanza, estrategias de resolución u obstáculos en el abordaje de tareas que involucran la interpretación del signo igual (por ejemplo, Stephen, 2006). De igual forma, se explora la relación que existe entre el conocimiento matemático para la enseñanza y la habilidad de los docentes para interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes, o bien se implementan experiencias de formación destinadas a enriquecer ese conocimiento o desarrollar esa habilidad del profesor (por ejemplo, Prediger, 2010).

Por otra parte, trabajos realizados en el contexto de la enseñanza primaria muestran que favorecer la comprensión del profesor acerca del pensamiento matemático de los alumnos, así como promover la utilización de esa comprensión para tomar decisiones relativas a la enseñanza, contribuye con el aprendizaje de los estudiantes (por ejemplo, Jacobs et al., 2007). Esto forma parte de lo que varios autores denominan desarrollar la habilidad de mirar profesionalmente del profesor (por ejemplo, Mason, 2002).

A partir de esta problemática, que refiere a la dificultad de los estudiantes con respecto a las interpretaciones del signo igual y a la invisibilidad de esta situación por parte de los docentes, resulta pertinente realizar un estudio con el objetivo de explorar la habilidad de mirar profesionalmente del futuro profesor de enseñanza media en situaciones que involucran al signo igual. Los hallazgos obtenidos brindarán insumos para tomar mejores decisiones relativas a los procesos de enseñanza en formación docente, que a su vez podrá repercutir positivamente en el aprendizaje de los estudiantes de enseñanza media.

■ Marco conceptual

En el marco conceptual de este trabajo confluyen dos perspectivas teóricas: el constructo de la mirada profesional del pensamiento matemático de los estudiantes (Jacobs et al., 2010) y los significados del signo igual (Matthews et al., 2012).

Mirada profesional

Con respecto a la mirada profesional, Jacobs et al. (2010) identifican tres destrezas interrelacionadas que permiten conceptualizar y caracterizar esta habilidad: percibir las estrategias de los estudiantes, interpretar la comprensión de los estudiantes y decidir cómo responder a partir de esa comprensión. Percibir las estrategias de los estudiantes, refiere a la capacidad de identificar elementos matemáticos relevantes en las estrategias que utilizan los estudiantes, en el entendido de que estos elementos pueden proporcionar una vía de acceso al pensamiento matemático de los alumnos. Interpretar la comprensión de los estudiantes, alude a la capacidad de razonar y reflexionar acerca de las estrategias de los estudiantes, vinculando las evidencias concretas con un marco de análisis general. Decidir cómo responder sobre la base de la comprensión de los estudiantes, refiere al razonamiento desarrollado por los docentes para tomar decisiones de enseñanza que favorezcan el aprendizaje de los estudiantes.

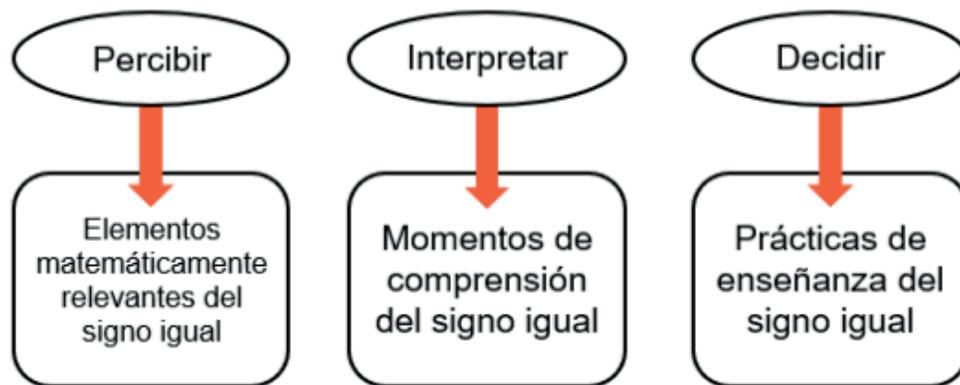
Signo igual

Con respecto a los significados del signo igual, Matthews et al. (2012) proponen una trayectoria de aprendizaje del signo igual que consta de cuatro niveles: operacional rígido, operacional flexible, relacional básico y relacional comparativo. Estos niveles de comprensión difieren principalmente en el tipo de sentencias numéricas ligadas al signo igual que interviene en cada caso. El nivel operacional rígido implica evaluar o completar sentencias en un contexto de «operaciones–igual–respuesta»: por ejemplo, $5+2=7$; mientras que el nivel operacional flexible refiere a sentencias que son compatibles a una visión operacional, pero que trascienden el caso típico anterior: por ejemplo, $7=\underline{5}+2$. Tanto el nivel relacional básico como el nivel relacional comparativo refieren a sentencias planteadas en un contexto de operaciones a ambos lados del signo igual (por ejemplo, $52+25=\underline{50}+27$); la diferencia radica en las estrategias implementadas por los estudiantes al completar o evaluar este tipo de sentencias, ya sea a través de cálculos o mediante la comparación de expresiones, respectivamente. A partir de esta trayectoria de aprendizaje, se identifican elementos matemáticos relevantes y momentos de comprensión del signo igual, así como prácticas de enseñanza que sugiere la literatura para enriquecer el conocimiento de este signo.

Mirada profesional y signo igual

La conjunción de estas dos perspectivas teóricas (Figura 1), que puede consultarse en detalle en Parodi (2021), sienta las bases para el diseño metodológico y el análisis de los datos obtenidos en esta investigación.

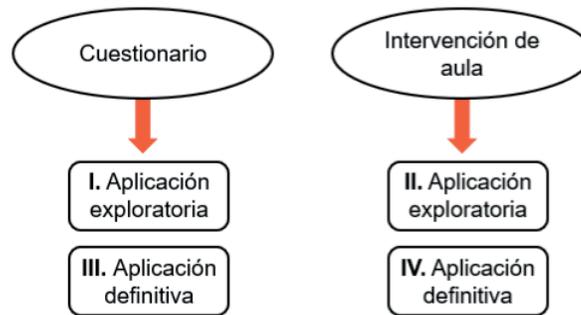
Figura 1. *Conjunción de las dos perspectivas teóricas que conforman el marco conceptual de la investigación.*



■ Metodología

Desde el punto de vista metodológico, se propone un estudio de casos con nueve estudiantes de profesorado que cursan el último año de la carrera de profesor en un instituto de formación docente de Uruguay y que tienen un grupo a cargo en la enseñanza media. Se diseña e implementa un experimento de enseñanza (Molina et al., 2011) dirigido a todos los participantes, en el que se aplica un cuestionario y se implementa una intervención de aula. En ambos casos, se realiza una exploración previa en otro grupo de estudiantes de profesorado, para valorar el diseño de estos instrumentos y realizar los ajustes necesarios (Figura 2).

Figura 2. Diseño metodológico de la investigación.



Cuestionario

El cuestionario consta de dos actividades (por ejemplo, Figura 3). En cada actividad, a partir de una tarea que está dirigida a estudiantes de segundo año de enseñanza media y que involucra implícitamente las interpretaciones del signo igual, los participantes deben anticipar las posibles estrategias de resolución, identificar los conocimientos matemáticos involucrados en la resolución y proponer una intervención de enseñanza para favorecer el aprendizaje de la temática que aborda cada tarea. Con cada actividad se pretende explorar la forma en que los participantes perciben, interpretan y deciden respecto del tópico matemático en cuestión, a partir de las estrategias de resolución que ellos mismos anticipan. En particular, se indaga si las decisiones de los participantes se apoyan en la interpretación de la comprensión matemática de los estudiantes y si esta interpretación toma en cuenta los elementos matemáticos relevantes que han sido percibidos.

Figura 3. Consigna de la actividad 2 del cuestionario.

Un profesor de segundo año de liceo les propuso a sus estudiantes la siguiente tarea:

Completa el espacio con el número que falta. Si piensas que hay más de una posibilidad, indícala. Explica tu respuesta.

$$14 \times 3 = \underline{\quad} - 3$$

a) ¿Cómo resolvería esta tarea un alumno de segundo año de liceo? Describa cada una de las estrategias que el alumno podría desarrollar.

b) Desde su perspectiva, ¿qué conocimientos matemáticos están involucrados en la resolución de esta tarea?

c) Elija una de las respuestas de los alumnos que usted consideró en la parte a. Si un alumno presenta esta respuesta, ¿cómo lo ayudaría a progresar en su aprendizaje relativo a la temática que propone la tarea?

La tarea incorporada a la actividad 2 del cuestionario, en particular, para su análisis por parte de los participantes, admite dos estrategias de resolución: la estrategia de *sustituir* y la estrategia de *resultado después del signo igual*. La estrategia de *sustituir* consiste en buscar un número que verifique la igualdad (en este caso, 45), ya sea mediante tanteo o a través del planteo y la resolución de una ecuación. Esta estrategia se apoya en la idea del igual como

signo que relaciona cantidades iguales (de aquí en más, E2) y deja al descubierto una interpretación de este signo como indicador de una relación de equivalencia numérica (M3, de aquí en más). La estrategia de *resultado después del signo igual*, en tanto, consiste en completar el espacio en blanco con el resultado de la operación que está planteada a la izquierda del signo igual (en este caso, 42). Esta estrategia no toma en cuenta la simetría de la igualdad (E1, de aquí en más) y revela una interpretación del igual como indicador del resultado de una operación (M1, de aquí en más). A partir de estas dos estrategias de resolución, se pueden implementar distintas intervenciones de enseñanza para favorecer la comprensión del signo igual: por ejemplo, abordar tareas que requieran analizar o completar otras sentencias numéricas en contextos no estándar de operaciones–igual respuesta.

La pregunta 2a solicita anticipar posibles estrategias de resolución de la tarea planteada, así como la descripción de cada una de estas. Las respuestas de los participantes a esta pregunta del cuestionario pondrán en evidencia principalmente la destreza de percibir. Se espera que todos anticipen la estrategia de sustituir, que será interpretada como una evidencia de percepción de la igualdad de cantidades (E2). En menor proporción, se espera que los participantes anticipen la estrategia de resultado después del signo igual, que podrá configurar evidencias de percepción de la simetría de la igualdad (E1).

La pregunta 2b indaga los conocimientos matemáticos que están involucrados en la resolución de la tarea en cuestión. Las respuestas de los participantes a esta pregunta del cuestionario pondrán en evidencia principalmente la destreza de interpretar. Se espera que la mayoría destaque que esta tarea guarda relación con las estrategias de resolución de ecuaciones o con las técnicas operatorias en el conjunto de los números reales. En particular, toda referencia al entendimiento del concepto de solución de una ecuación, sumado a la previsión de la estrategia de sustituir, podrá configurar evidencia de interpretación del momento de comprensión relacional básico (M3); al igual que toda referencia a la interpretación del signo igual o la noción de igualdad, ligado a la anticipación de la estrategia de resultado después del signo igual, podrá constituir evidencia de interpretación del momento de comprensión operacional rígido (M1) del signo igual.

La pregunta 2c solicita una devolución para favorecer el aprendizaje de la temática que propone la tarea, tomando como partida una de las estrategias de resolución anticipadas con anterioridad. Las respuestas de los participantes pondrán en evidencia principalmente la destreza de decidir. Se espera que la mayoría proponga una intervención para desarticular el tanteo y promover el planteo y la resolución de una ecuación, en el marco de la estrategia de sustituir. En menor proporción, si se prevé que un estudiante de enseñanza media complete el espacio en blanco con un número que no verifica la igualdad, los participantes podrán solicitar la verificación correspondiente para evidenciar el error del estudiante.

Intervención de aula

A partir de los resultados obtenidos tras la aplicación del cuestionario, se planifica e implementa una intervención de aula con el propósito de promover el desarrollo de la mirada profesional en situaciones que involucran al signo igual. En esta intervención, realizada una semana después de la aplicación del cuestionario, se propone una dinámica de taller en torno al análisis de un caso de una alumna de enseñanza media resolviendo tareas que involucran interpretaciones del signo igual. Los tres equipos conformados reciben las distintas actividades para discutir internamente y luego abordar colectivamente. Cada actividad se presenta al concluir la puesta en común de la actividad anterior.

■ Resultados

En este escrito, para ejemplificar el análisis realizado en la investigación, se focalizará en los principales hallazgos obtenidos tras la aplicación del cuestionario, en lo que refiere específicamente a la actividad 2.

Respuestas a la pregunta 2a

Todos los participantes anticipan la estrategia de sustituir, que consiste en buscar un número que verifique la igualdad, ya sea mediante tanteo (8 EPM) o a través del planteo y la resolución de una ecuación (7 EPM). A su vez,

menos de la tercera parte de los participantes anticipa la estrategia de resultado después del signo igual, que consiste en completar el espacio en blanco de la sentencia con el resultado de la operación que está planteada a la izquierda del signo igual (2 EPM).

Gustavo, por ejemplo, es uno de los siete participantes que, en respuesta a esta pregunta, muestra evidencias de percepción de un solo elemento matemático relevante del signo igual: la igualdad de cantidades (E2) (Figura 4).

Figura 4. Extracto de la respuesta de Gustavo a la pregunta 2a del cuestionario.

Suponiendo que ya posee un cierto conocimiento en la resolución de ecuaciones podría desarrollar las siguientes estrategias:

$$14 \cdot 3 = x - 3 \Rightarrow 42 = x - 3 \Rightarrow 42 + 3 = x \Rightarrow \boxed{x = 45}$$

El futuro profesor prevé que los estudiantes asocien la tarea con el tema ecuaciones y recurran a una técnica aprendida en clase para proceder a su resolución. Si bien esta estrategia se apoya en la idea del igual como signo que relaciona cantidades iguales, porque posibilita la obtención de un número que verifica una igualdad con operaciones a ambos lados del signo igual, la estrategia prevista por el EPM no incluye la realización de una verificación explícita o la implementación de otra alternativa que evidencie esta idea relativa al signo igual. Por consiguiente, Gustavo alude implícitamente a la igualdad de cantidades (E2) para anticipar la estrategia de sustituir y mostrar evidencias de percepción de un solo elemento matemático relevante del signo igual.

Figura 5. Extracto de la respuesta de Gustavo a la pregunta 2a del cuestionario.

$$14 = \frac{\square - 3}{3} \Rightarrow 14 = \frac{\square}{3} - \frac{3}{3} \Rightarrow 14 = \frac{\square}{3} - 1 \Rightarrow 14 + 1 = \frac{\square}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15 = \frac{\square}{3} \Rightarrow \square = 15 \times 3 \Rightarrow \boxed{\square = 45}$$

$$14 \times 3 + 3 = _ \Rightarrow 14 \times 6 = _ \Rightarrow 84 = _$$

En particular, se destacan dos aspectos de la respuesta de Gustavo (Figura 5). Por un lado, se prevé una secuencia de transformaciones poco plausible que conduce al número buscado, a través de una serie de despejes no esperables en un estudiante de enseñanza media ante la resolución de este tipo de tareas. Por otro lado, se advierte la posibilidad de que los alumnos cometan un error de corte operatorio que está relacionado con el orden jerárquico en que se realizan las operaciones, pero este error tampoco es habitual en este contexto. Esto muestra una dificultad de los profesores en formación, ligada al uso del conocimiento de los estudiantes y la enseñanza, que dificulta la anticipación de posibles estrategias de resolución, así como la previsión de errores frecuentes y esperados en el ámbito escolar.

Joaquín, en tanto, es uno de los dos EPM que al responder esta pregunta muestra evidencias de percepción de dos elementos matemáticos relevantes del signo igual: igualdad de cantidades (E2) y simetría de la igualdad (E1) (Figura 6).

Figura 6. Extracto de la respuesta de Joaquín a la pregunta 2a del cuestionario.

Una respuesta posible sería:

$$14 \times 3 = \underline{42} - 3$$
$$42 = 42$$

Otra respuesta posible sería:

$$14 \times 3 = \underline{42} - 3 = 39$$

Aquí se prevé la búsqueda de un número que verifique la igualdad y se explicita la verificación correspondiente: « $42=42$ ». Esta estrategia involucra la idea del igual como signo que relaciona cantidades iguales (E2), lo que constituye evidencias de percepción de este elemento matemático relevante del signo igual. A su vez, se considera la posibilidad de completar el espacio en blanco con el número 42, que es el resultado de la operación 14×3 , y se agrega un segundo signo igual a la derecha de la sentencia con el resultado de la operación que lo precede: « $14 \times 3 = 42 - 3 = 39$ ». Esta estrategia de resolución se apoya en una lectura unidireccional del signo igual, de izquierda a derecha, donde las operaciones se plantean solamente a la izquierda de este signo y el resultado de estas operaciones a la derecha. Por lo tanto, Joaquín alude a la simetría de la igualdad (E1), en el marco de la otra estrategia de resultado que anticipa, mostrando evidencias de percepción de un segundo elemento matemático relevante del signo igual.

Respuestas a la pregunta 2b

Los conocimientos matemáticos que los participantes asocian a la tarea planteada, con mayor frecuencia, refieren a las operaciones en el conjunto de los números reales (7 EPM) o a las estrategias de resolución de una ecuación (6 EPM). Asimismo, la mitad de los participantes hace referencia a la noción de igualdad numérica (4 EPM) o a los significados del signo igual (1 EPM). En menor proporción, otros conocimientos matemáticos son identificados por los participantes: por ejemplo, el concepto de solución de una ecuación (1 EPM) o la noción de incógnita (2 EPM).

Federico es uno de los dos EPM que al responder esta pregunta no muestra evidencias de interpretación de momentos de comprensión del signo igual: «desde mi perspectiva están implicadas las operaciones y las propiedades de las operaciones en el conjunto de los números reales, creo que el alumno podría completar el espacio correctamente utilizando estas propiedades y operaciones, como un juego y no formalmente». Si bien la tarea planteada en esta actividad requiere de una destreza operatoria, porque propone la búsqueda de un número que verifique una igualdad, el participante no hace mención alguna a la interpretación relacional del signo igual o al entendimiento de la noción de igualdad numérica que subyace a la estrategia de sustituir que el propio participante anticipa en respuesta a la pregunta 2a.

David, en tanto, es uno de los cinco EPM que al responder esta pregunta muestra evidencias de interpretación de un solo momento de comprensión del signo igual: relacional básico (M3). En concreto, este participante señala que la tarea planteada está relacionada con tres conceptos o habilidades matemáticas que enumera de la siguiente manera: «resolución de ecuaciones polinómicas de primer grado, conjunto solución de una ecuación y operaciones en el conjunto de los números enteros y sus propiedades». En el entendido que el EPM se refiere al concepto de solución de una ecuación cuando alude al «conjunto solución de una ecuación», sumado a que en respuesta a la pregunta 2a anticipa una estrategia de resolución que implica buscar un número que verifique una igualdad, se infiere que, para este participante, la aplicación de la estrategia de sustituir revela una interpretación relacional del signo igual, que configura evidencias de interpretación de M3.

Martín, por último, es uno de los dos EPM que al responder esta pregunta del cuestionario muestra evidencias de interpretación de dos momentos de comprensión del signo igual: operacional rígido (M1) y relacional básico (M3). Este participante brinda una respuesta que clarifica el vínculo entre la tarea analizada, las estrategias de resolución anticipadas y el conocimiento relativo al signo igual involucrado en cada una de estas: «lo que implica resolver una ecuación, propiedades que cumple una ecuación, concepción del símbolo igual, reducción y suma de números opuestos». En este caso, el EPM alude explícitamente al significado del signo igual como uno de los conocimientos necesarios para el abordaje de la tarea que, ligado a la anticipación previa de las estrategias de sustituir y de resultado después del signo igual, constituye evidencias de interpretación de M1 y M3.

Respuestas a la pregunta 2c

La mitad de los participantes propone una intervención para favorecer una variante de la estrategia de sustituir (4 EPM) o enriquecer la interpretación del signo igual (4 EPM). En menor proporción, las decisiones adoptadas por los participantes pretenden abordar un error de tipo operatorio (1 EPM). Para alcanzar estos propósitos, se prevé la formulación de preguntas (4 EPM), el planteamiento de otra tarea (2 EPM) o la explicación y presentación de ejemplos (3 EPM).

Gustavo es uno de los cinco EPM que, en respuesta a esta pregunta, toma una decisión que no abona a la comprensión del signo igual. Específicamente, el participante propone una explicación para favorecer la superación de un error operatorio anticipado previamente, que subraya la importancia de identificar el orden en el que se realizan las operaciones en el contexto de un cálculo combinado (Figura 7).

Figura 7. Extracto de la respuesta de Gustavo a la pregunta 2c del cuestionario.

$$14 \times 3 + 3 = _ \Rightarrow 14 \times 6 = _ \Rightarrow 84 = _$$

Lo mejor es siempre separar terminos antes de comenzar a operar. Así:

$$\boxed{14 \times 3} + 3 = _$$

$$42 + 3 = \underline{45}$$

En este caso, para abordar el error previsto, el profesor en formación elabora una explicación que destaca la necesidad de «separar términos antes de comenzar a operar» y, sobre la base de esta apreciación, muestra una forma correcta de proceder en este caso. Entonces, Gustavo focaliza en un error poco plausible, de tipo operatorio, que no guarda relación alguna con las interpretaciones del signo igual involucradas en la resolución de la tarea analizada.

Juan, en tanto, es uno de los dos EPM que, al responder esta pregunta, toma una decisión que se apoya en un solo elemento matemáticamente relevante del signo igual para favorecer la comprensión de este signo. Específicamente, propone la formulación de preguntas para abonar a la superación de un error que el participante había anticipado, en el que se concluía erróneamente que el número buscado era -45:

Plantearía preguntas guía como: ¿a qué conjunto pertenecen los números 14 y 3? Si los operamos, ¿a qué conjunto pertenece el resultado? ¿Puedes entonces dar ese valor? Realiza ambas operaciones: ¿el resultado es el mismo? ¿Qué pudo haber sucedido? ¿Se cumple la igualdad planteada? ¿Se te ocurre alguna estrategia distinta a la que has planteado?

El participante propone una serie de preguntas que conducen a la verificación de la sentencia, para el valor erróneo obtenido, así como a la exploración de otras estrategias de resolución. Juan se apoya en la idea del igual como signo que relaciona cantidades iguales, para abonar a la interpretación de este signo como indicador de una relación de equivalencia, porque promueve la realización de cálculos, en una sentencia numérica con operaciones a ambos lados del signo igual, para constatar que no se verifica una igualdad.

Asimismo, el participante deja entrever la posibilidad de transitar, por ejemplo, de la resolución de una ecuación a la aplicación de la técnica de tanteo, en dirección contraria a la decisión adoptada por otros participantes que, en el contexto de la estrategia de sustituir, pretenden favorecer el tránsito de la técnica de tanteo a la resolución formal de una ecuación.

Joaquín, por último, es uno de los dos EPM que, al responder esta pregunta, toma una decisión que se apoya en los tres elementos matemáticamente relevantes del signo igual para abonar a la comprensión de este signo. Propone una tarea que apunta a transitar de la estrategia de resultado después del signo igual a la tarea de sustituir (Figura 8).

Figura 8. Extracto de la respuesta de Joaquín a la pregunta 2c del cuestionario.

Elijo la segunda respuesta.
 Para ayudarlo a progresar le propondría ejercicios que trabajen el concepto de igualdad desde otra perspectiva y que se relacione con las propiedades que cumple una relación de equivalencia.
 Ejemplos de ejercicios

$$_ = 5 + 3, \quad 10 + 5 = 5 + _, \quad _ = 3, \quad 4 = _,$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 + 3 = 4 + 2 \\ 4 + 2 = 1 + 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 + 3 = _ + 5, \quad _ + 2 = 3 + 4$$

La actividad que propone Joaquín consiste en completar un conjunto de sentencias numéricas, en un contexto no estándar de ausencia de operaciones o de operaciones solamente a la derecha del signo igual, así como sentencias en las que figuran operaciones a ambos lados del signo igual. Estas sentencias requieren una lectura unidireccional del signo igual (por ejemplo, « $_ = 5 + 3$ »), o bien se apoyan en la idea del igual como signo que relaciona cantidades iguales (por ejemplo, « $_ + 2 = 3 + 4$ ») o como signo que conserva la igualdad (por ejemplo, « $10 + 5 = 5 + _$ »). Es decir, el participante alude a la simetría de la igualdad (E1), la igualdad de cantidades (E2) y la conservación de la igualdad (E3) para favorecer el momento de comprensión relacional básico (M3) que requiere la tarea analizada en este caso, así como los momentos de comprensión operacional flexible (M2) y relacional comparativo (M4) del signo igual. En otras palabras, la intervención de Joaquín alude a todos los elementos matemáticos relevantes del signo igual, así como a todos los momentos de comprensión de este signo que se pretenden enriquecer.

■ Conclusiones

Los resultados obtenidos ponen de relieve dificultades específicas de los participantes con respecto a cada una de las tres destrezas de la mirada profesional en situaciones que involucran al signo igual. Estas dificultades se concentran principalmente en las respuestas al cuestionario que han sido presentadas en este escrito, así como en la puesta en común de las primeras tres actividades de la intervención de aula.

Estos hallazgos, por ejemplo, revelan una dificultad de los futuros profesores para percibir los elementos matemáticos relevantes del signo igual, en casos en que el conocimiento de estos aspectos es crucial para la

resolución exitosa de las tareas que se analizan. Al anticipar las estrategias de resolución de la tarea de la actividad 2 del cuestionario, en particular, menos de la tercera parte de los participantes considera la posibilidad de que los alumnos completen el espacio en blanco de la sentencia con el resultado de la operación que está escrita a la izquierda del signo igual, desviándose la atención del hecho de que la simetría de la igualdad es un aspecto matemático relevante en la resolución de la tarea en cuestión. Ligado a lo anterior, quienes participan en esta investigación, muestran una tendencia a suponer que los estudiantes resolverán con éxito las tareas analizadas o que cometerán errores poco plausibles en este tipo de situaciones.

También se infieren dificultades de los futuros profesores para interpretar la comprensión matemática de los estudiantes en torno al signo igual. Menos de la mitad de los participantes declara explícitamente que la resolución de las dos tareas del cuestionario requiere una interpretación relacional del signo igual. Estos resultados permiten inferir una limitación de los profesores en formación para reconocer o explicitar que, al no considerar la idea del signo igual como signo que relaciona cantidades iguales, por ejemplo, puede interpretarse el signo como el indicador del resultado de una operación, y que esta interpretación operacional puede obstaculizar la resolución de las tareas en cuestión.

Al tomar decisiones de enseñanza, en tanto, el foco de atención de los participantes trasciende la comprensión relacional del signo igual y revela una preferencia de los futuros profesores por focalizar en lo instrumental sobre lo conceptual (Skemp, 2006), debido a que menos de la mitad de los participantes toman una decisión para abordar la superación de un error o enriquecer la comprensión del signo igual. En particular, las evidencias recogidas ponen de relieve una dificultad de los futuros profesores para anticipar intervenciones desafiantes (Guberman y Leikin, 2013) que favorezcan la interpretación de este signo. De hecho, los participantes recurren con frecuencia a la formulación de preguntas poco efectivas o al planteo de tareas no desafiantes para alcanzar el propósito de enseñanza considerado.

Tanto al percibir, como al interpretar y decidir, se destaca un apego de los participantes hacia los procedimientos formales de resolución de tareas. Por ejemplo, quienes asocian la tarea de la actividad 2 del cuestionario con el planteo y la resolución de una ecuación, ya sea al anticipar esta estrategia de resolución o al tomar una decisión para alentar su implementación, están promoviendo la aplicación mecánica de una técnica aprendida en clase, sin advertir que la tarea en cuestión también puede resolverse a través de estrategias personales de resolución ligadas al tanteo o a la comparación de expresiones. Este apego condiciona y desvirtúa el análisis de las distintas situaciones, porque se realizan inferencias acerca de lo que los estudiantes comprenden o deberían haber comprendido, que no se corresponden con el conocimiento que emana de la práctica profesional y de los resultados de investigación relativos a las interpretaciones del signo igual.

Un análisis conjunto de las evidencias relativas a las destrezas de interpretar y de decidir, en tanto, también deja entrever una relación de dependencia entre estas dos destrezas de la mirada profesional. Esta relación de dependencia está presente, por ejemplo, cuando los participantes que toman una decisión para favorecer el tránsito de la interpretación operacional a la interpretación relacional del signo igual son aquellos que mostraron evidencias de interpretación de estos dos momentos de comprensión del signo igual. Se infiere que el desarrollo de la destreza de interpretar puede proveer mejores condiciones para desarrollar la destreza de decidir sobre la base de la comprensión de los estudiantes.

■ Referencias bibliográficas

- Asquith, P., Stephens, A., Knuth, E. y Alibali, M. (2007). Middle school mathematics teachers' knowledge of students' understanding of core algebraic concepts: equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(3), 249–272.
- Burgell, F. y Ochoviet, C. (2015). Significados del signo de igual y aspectos de su enseñanza. Un estudio realizado con estudiantes de primer año de enseñanza secundaria y sus profesores. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(3), 77–98.

- Guberman, R. y Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: changing teachers' views by employing multiple-solution tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(1), 33–56.
- Jacobs, V., Franke, M., Carpenter, T., Levi, L. y Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 258–288.
- Jacobs, V., Lamb, L. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169–202.
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), 317–326.
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. Routledge Falmer.
- Matthews, P., Rittle–Johnson, B., McEldoon, K. y Taylor, R. (2012). Measure for measure: what combining diverse measures reveals about children's understanding of the equal sign as an indicator of mathematical equality. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(3), 316–350.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75–88.
- Parodi, S. (2021). *La habilidad de mirar profesionalmente del futuro profesor en situaciones que involucran al signo igual* (tesis de doctorado no publicada). CICATA–IPN.
- Parodi, S., Ochoviet, C. y Lezama, J. (2017). La comprensión del signo de igual en la entrada al álgebra: el diseño de tareas y la conversación en la clase de matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 35(3), 51–67.
- Parodi, S., Ochoviet, C. y Lezama, J. (2020). Interpretaciones del signo igual en un contexto algebraico de polinomios. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 34(68), 1264–1284.
- Prediger, S. (2010). How to develop mathematics–for–teaching and for understanding: the case of meanings of the equal sign. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(1), 73–93.
- Skemp, R. (2006). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 12(2), 88–95.
- Stephens, A. (2006). Equivalence and relational thinking: preservice elementary teachers' awareness of opportunities and misconceptions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(3), 249–278.
- Trivilin, L. y Ribeiro, A. (2015). Conhecimento matemático para o ensino de diferentes significados do sinal de igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos anos iniciais do ensino fundamental. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 29(51), 38–59.
- Vermeulen, C. y Meyer, B. (2017). The equal sign: teachers' knowledge and students' misconceptions. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 21(2), 136–147.