COMPRENSIÓN DE ADICIÓN Y DE PRODUCTO DE PROBABILIDADES: CASO DE UN ESTUDIANTE DE BACHILLERATO TECNOLÓGICO

UNDERSTANDING OF ADDITION AND PRODUCT OF PROBABILITIES: A STUDENT CASE FROM TECHNOLOGICAL HIGH SCHOOL

José Luis Ávila Betancourt, Ana María Ojeda Salazar
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. (México)
joseluis.avila@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx

Resumen:
Caracterizamos las ideas de adición y producto de probabilidades en la propuesta institucional de estocásticos de un bachillerato tecnológico de México, y su comprensión por uno de sus estudiantes luego de su asistencia a una corta estrategia de enseñanza adicional de estas ideas. Con una metodología cualitativa de investigación, se aplicó la célula de análisis y el triángulo epistemológico para ideas fundamentales de estocásticos al programa de estudio respectivo, a respuestas del caso de estudio, a un cuestionario y a una entrevista, para caracterizar el programa e identificar procesos de pensamiento matemático en la comprensión del estudiante. Ello resultó en la deficiencia en el programa de referencia a problemas, términos técnicos y registros semióticos, así como dificultades de categorización, de lenguaje e ineficiencia operativa del estudiante. Aunque la discontinuidad con las ideas en secundaria y las deficiencias del programa dificultaron más avance del estudiante con la enseñanza adicional, al término de ésta se le ubicó en un nivel de simbolización de esas ideas fundamentales.

Palabras clave: Estocásticos, probabilidad, comprensión, bachillerato, cualitativa

Abstract:
We have characterized the ideas of addition and product of probabilities in the institutional proposal of stochastics of a technological high school in Mexico, and its understanding by one of its students, who attended to a short additional teaching strategy of these ideas. With a qualitative research methodology, the analysis cell and the epistemological triangle for fundamental ideas of stochastics were applied to the respective syllabus, to responses of the case study, to a questionnaire, and to an interview in order to characterize the program, and to identify mathematical thinking processes in the student's understanding. This resulted in the syllabus deficiency with respect to reference to problems, technical terms, and semiotic registers, as well as categorization and language difficulties, and operational inefficiency of the student. Although the discontinuity of the ideas in middle school and the syllabus' deficiencies made it difficult student's further advance with the additional teaching, at t end of this study, the student was placed at the symbolization level for those fundamental ideas.

Keywords: stochastic, probability, understanding, high school, qualitative

Introducción

En México, la unidad de aprendizaje "Probabilidad y Estadística" se imparte en el sexto semestre en el bachillerato tecnológico (DEMS-IPN, 2008), después de dos años y medio sin la enseñanza de temas de estocásticos en ese nivel educativo. Salcedo (2013) señala que todos los programas de estudio de matemáticas para ese bachillerato se plantean con una perspectiva determinista y no integral. Martínez (2018) reporta que el enfoque frecuencial de la probabilidad no es explícito en el programa de "Probabilidad y Estadística" y que los estudiantes no dotan a la media ni a la desviación estándar de un conjunto de datos, de un sentido funcional ni analítico, sino sólo algorítmico.

La importancia de una investigación sobre la comprensión de la probabilidad y la advertencia del azar radica en la interpretación del humano sobre su mundo. Heitele (1975) afirma que tanto niños como adultos no educados "están confinados a un determinismo pobremente entendido" (p. 195). La necesidad de incluir temas de esta área en los currículums obedece a la necesidad del humano de acoplarse a una sociedad expuesta a grandes cantidades de información de naturaleza estocástica. Sin embargo, como señala Fischbein (1975), la instrucción de la escuela favorece las situaciones deterministas que guían al estudiante a respuestas y representaciones únicas de los fenómenos.

Bruner (2001) consideró el rol de las conjunciones y las disyunciones de categorías en la adquisición de conceptos. Particularmente, Tversky y Kahneman (1983) identificaron sesgos del pensamiento probabilístico de estudiantes universitarios, como la falacia de la conjunción. Tales roles son evidentes en la propuesta epistemológica de Heitele (1975) de las diez ideas fundamentales de estocásticos, en particular en las de "Combinación de Probabilidades" (p. 195): la regla de la adición y la regla del producto.

Las preguntas que se plantean en esta investigación son: a) ¿Qué caracteriza a la enseñanza de los temas de adición y del producto de probabilidades?; b) ¿Qué caracteriza la comprensión de un estudiante de bachillerato tecnológico de las reglas de adición y del producto de probabilidades?; y c) ¿Qué papel juegan diferentes registros de representación en la comprensión de un estudiante de bachillerato tecnológico de las reglas de adición y del producto de probabilidades? Se pretende proponer una estrategia de enseñanza de las ideas de adición de probabilidades y de producto de probabilidades para estudiantes de bachillerato tecnológico.

Marco Teórico

La investigación se sustentó en tres ejes teóricos: epistemológico, cognitivo y social (Ojeda, 1994).

Eje Epistemológico

Con un enfoque epistemológico, Heitele (1975) propone diez ideas fundamentales de estocásticos (medida de probabilidad, campo de probabilidad, regla de la adición, independencia, equidistribución y simetría, modelo de urna y simulación, variable estocástica, ley de los grandes números e idea de muestra), cuya enseñanza se debe realizar de manera continua en un currículo en espiral y que proveen al individuo de modelos explicativos de ideas de estocásticos que difieren en los distintos estratos cognoscitivos sólo en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración, pero no en su estructura.

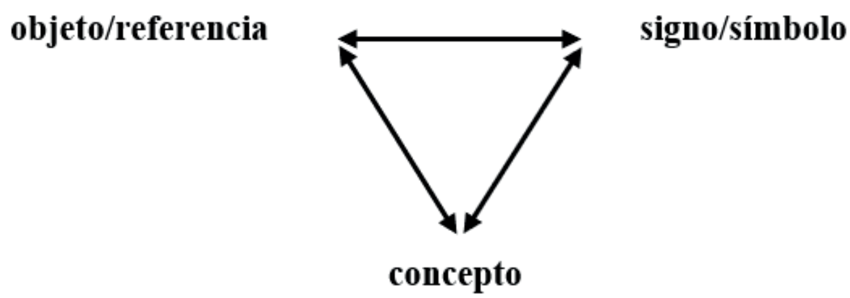
Uno de sus referentes es el estudio de Piaget e Inhelder (1975) de la evolución de la idea de azar en el niño, que surge alrededor de los cuatro años y avanza a través de tres estadios.

La Regla de la Adición, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, así como la Regla del Producto, $P(A \cap B) = P(A|B)\, P(B)$, modelan la combinación de eventos simples en eventos compuestos (Heitele, 1975). Si A y B son mutuamente excluyentes, en símbolos $A \cap B = \emptyset,\ P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

La Regla del Producto es expresión del grado de condicionamiento de la ocurrencia de un evento sobre la de otro, o sea $P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}$ $(P(H) \neq 0)$, por lo que, si los eventos A y H son eventos independientes entre sí, entonces $P(A|H) = P(A)$ y $P(H|A) = P(H)$, de ahí que $P(A \cap H) = P(A) * P(H)$.

Steinbring (2005) distingue en su propuesta del triángulo epistemológico tres elementos relevantes para caracterizar la naturaleza de las ideas matemáticas: objeto, concepto y signo. Exhibe así la forma relacional entre contextos interpretativos, aspectos formales y de cálculo. Steinbring (1991) interrelaciona objeto, signo y concepto en el triángulo epistemológico para explicar la constitución de los conceptos matemáticos; para esta última, son necesarios medios de representación, convenciones sociales y patrones basados en la experiencia previa del individuo. La Figura 1 muestra la generalidad de un triángulo epistemológico.

Figura 1. *Triángulo Epistemológico.*



Fuente: Steinbring (1991).

Eje Cognitivo

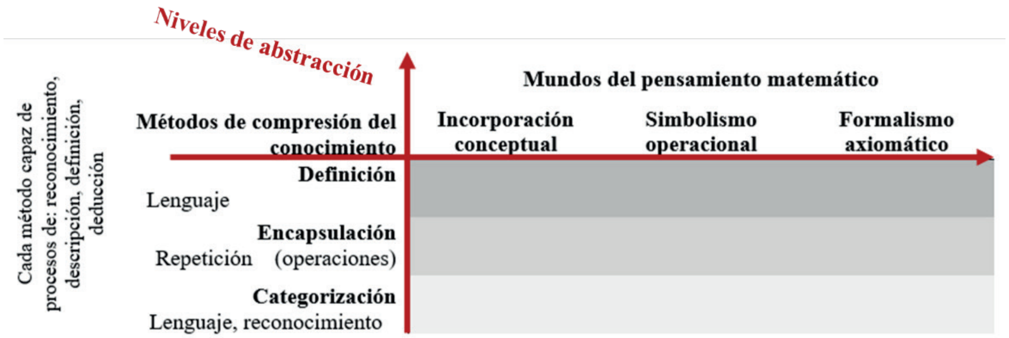
En su propuesta sobre el proceso del aprendizaje, Bruner (2001) ha estudiado los procesos de categorización en la adquisición de conceptos. Dos tipos especiales de categorías que se toman en cuenta en esta investigación son las categorías con atributos de criterio y las categorías con atributos definitorios. La convergencia gradual entre categorías con atributos definitorios y categorías con atributos de criterio resulta en la adquisición de conceptos. Por otro lado, las categorías conjuntivas, disyuntivas y relacionales discriminan valores de varios atributos de las instancias (Bruner, 2001).

En línea con las investigaciones de Piaget y de Bruner, para Tall (2013) el pensamiento matemático evoluciona según tres mundos: el de incorporación, el simbólico y el axiomático, los cuales corresponden al dominio de conceptos que logra el individuo. Los mundos se revelan desde la percepción de objetos concretos hasta el tratamiento formal de conceptos abstractos, por el empleo de procesos del pensamiento, a saber: de reconocimiento, de repetición y de lenguaje. En cada mundo, esos procesos se emplean según *métodos de compresión* del conocimiento: categorización, encapsulación y definición. Cada mundo y cada método son susceptibles de actividades inherentes a los procesos del pensamiento matemático, entre ellos, reconocimiento, descripción, definición y deducción (Tall, 2013), en abstracción progresiva por cada individuo. La Figura 2 esquematiza esta propuesta.

Duval (2017) estudia los registros semióticos utilizados en la actividad matemática, para la que describe los procesos cognitivos de producción, tratamiento y conversión. Según Duval (2017), un registro de representación semiótica es una producción física mediante la que se externa una representación y que describe el funcionamiento cognitivo del individuo. Señala que “para que un sistema semiótico sea considerado como registro, es necesario identificar las operaciones de producción y tratamiento que hacen posible su realización” (p. 56).

Para Fischbein, las intuiciones son “adquisiciones cognitivas que intervienen directamente en acciones prácticas o mentales, como resultado de la inmediatez de sus características, generalidad, capacidad de extrapolación, estructuralidad y evidenciación” (1975, p. 117). El autor sugiere que existen intuiciones primarias basadas en experiencias previas del individuo, e intuiciones secundarias derivadas de la formación científica.

Figura 2. *Niveles de mundos y procesos en el pensamiento matemático.*



Fuente: Interpretación propia de la propuesta de Tall (2013).

El tratamiento de Fischbein (1975) de la exclusividad mutua y de la independencia, así como los sesgos cognitivos sobre probabilidad tratados por Tversky y Kahneman (1983), conciernen a las características cognitivas de objetos, conceptos y representaciones semióticas, como las de la independencia física de fenómenos aleatorios. Los sesgos como la falacia de la conjunción (Tversky y Kahneman, 1983) resultan de las heurísticas de representatividad y disponibilidad, que contradicen la extensionalidad de la probabilidad.

Eje Social

Para Bruner (2001), la interacción social es un factor para la adquisición y formación de conceptos. Por su parte, Steinbring (2005) considera esa interacción inscrita en el intercambio y asignación de significados durante la justificación y argumentación del individuo respecto a su creación y uso de conceptos. Por ello, caracteriza esta interacción social mediante un análisis de pares de significadores-significados.

Ojeda (2006) advierte la importancia del contexto al que pertenecen las situaciones en la comprensión de estocásticos y la resolución de problemas. Los contextos de situaciones referentes han sido tipificados por autores como Díaz y Poblete (2001), quienes se refieren en su propuesta a cuatro tipos de contextos en los problemas sobre probabilidad: real, realista, matemático y fantasista.

Método

Enfocamos el caso de estudio (Rodríguez, Flores y García, 1996), OG, del sexto semestre de bachillerato tecnológico, participante voluntario desde 2018 en el convenio entre el CECyT 4 del IPN y el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav. La investigación se organizó en tres fases. La primera, de investigación documental (Cortés y García, 2003), identificó antecedentes en la vía de nuestro planteamiento y examinó la propuesta institucional para estocásticos del Bachillerato Tecnológico (DEMS-IPN, 2008). La segunda fase se realizó con la participación *en línea* de OG, en cinco sesiones de enseñanza, de dos horas de duración por semana, para una introducción a los fundamentos de la probabilidad.

Para la tercera fase, en la sexta sesión se le aplicó un cuestionario *en línea* referente a las ideas en foco y, en la séptima sesión, una entrevista semiestructurada (Zazkis y Hazzan, 1998) basada en sus respuestas al cuestionario. Las siete sesiones se realizaron y videograbaron en la plataforma Teams y fueron independientes de las clases regulares del caso de estudio.

Analizamos los datos recopilados de acuerdo con los criterios en la célula de análisis (Ojeda, 2006): situaciones y contextos, ideas fundamentales de estocásticos, recursos semióticos, términos empleados y otros conceptos matemáticos. Se profundizó en los aspectos epistemológico y comunicativo según la propuesta de Steinbring (2005) y en el aspecto cognitivo de acuerdo con las propuestas de Bruner (2001) y Tall (2013).

Los instrumentos

El cuestionario constó de seis reactivos planteados como problemas con preguntas abiertas (para un ejemplo, véase la Tabla 1), se le envió electrónicamente, OG lo contestó, fotografió sus respuestas y las envió de regreso también electrónicamente.

La Tabla 1 muestra la pormenorización de los problemas 1 y 4 del cuestionario que ponen en juego las ideas fundamentales de estocásticos de forma implícita o explícita, particularmente las de adición de probabilidades y producto de probabilidades. Se tomaron en cuenta los criterios de la célula de análisis (Ojeda, 2006) aplicados dichos problemas del cuestionario.

Tabla 1. *Caracterización del cuestionario aplicado al caso OG, problemas 1 y 4.*

Problema	Contextos y situaciones referentes	Ideas fundamentales de estocásticos	Recursos para organizar y (re) presentar datos	Términos empleados	Otros conceptos matemáticos
.	Contexto: *Realista* (Díaz y Poblete 2001) Situación: Encuesta y datos: Probabilidad de respuesta por rango de edad.	Medida de probabilidad, campo de probabilidad, equidistribución y simetría, modelo de urna, **regla de la adición**.	Lengua natural. Lenguaje numérico.	Selección al azar. Una del total. Evento simple. Organizar datos. Espacio muestra.	Número y operaciones. Conjunto y operaciones.
.	Contexto: *Realista.* Situación: Producción de artículos por empleados: Probabilidad de estado del artículo por trabajador.	Medida de probabilidad, campo de probabilidad, equidistribución y simetría, modelo de urna, **regla de la adición** (ítems i, k), **regla del producto**.	Lengua natural. Lenguaje numérico.	Selección al azar. Uno del total. Evento simple. Espacio muestra. Probabilidad… y… Si selecciona… y… probabilidad de… Intersección de eventos. Independientes. Excluyentes.	Número y operaciones. Conjunto y operaciones.

Fuente: Elaboración propia.

Por otro lado, el guion de entrevista de tipo semiestructurado (Zaskis y Hazzan, 1998) consistió en 42 preguntas, divididas en seis secciones. El objetivo de las preguntas fue profundizar en el dominio conceptual y procedimental de ideas fundamentales de estocásticos del estudiante mediante la identificación de procesos del pensamiento matemático que reflejen su reconocimiento, su repetición y su lenguaje al respecto.

Resultados del análisis: Programa de Estudios

La competencia general de la unidad “Probabilidad y Estadística” del bachillerato tecnológico (DEMS-IPN, 2008) es que el estudiante resuelva “problemas referentes a estadística descriptiva y probabilidad en su entorno académico, social y global” (p. 5). Los temas de adición de probabilidades y de producto de probabilidades corresponden a la competencia particular 2: “Resuelve problemas referentes a teoría de conjuntos, técnicas de conteo y probabilidad” (p. 5). Esta competencia particular se desagrega en “Resultados de Aprendizaje Propuestos” (RAP); de ellos se tomaron en cuenta los RAP2 (sobre teoría de conjuntos) y RAP3 (sobre probabilidad). La Tabla 2 pormenoriza el planteamiento en el programa de estudios de los contenidos de interés en nuestra investigación.

El tipo de problemas en el programa de estudios (ámbito académico, social y global) coincide con el de naturaleza rutinaria de la clasificación de Díaz y Poblete (2001), pues los criterios de evaluación de la propuesta se refieren a acciones y adverbios como “identifica”, “aplica una regla”, “ordenada y precisa” y “calcula correctamente” para la resolución de problemas, de lo que se infiere que el estudiante tendría que conocer previamente el procedimiento para resolverlos.

En lo que concierne a las ideas fundamentales de estocásticos, el programa incluye la diez, sin embargo, cada competencia particular acapara temas específicos. Así, la competencia particular 1 trata ideas referentes a estadística descriptiva, la competencia particular 2 trata ideas referentes a probabilidad y la competencia particular 3 incluye las ideas de ley de los grandes números y variable estocástica. Por lo que el tratamiento en el programa de las ideas en foco para esta investigación resulta compartimentalizado.

Para los resultados esperados RAP2 y RAP3 no hay referencias sobre el dominio de lenguaje y de diagramas que debe tratar el estudiante, por lo que no se puede concluir si el programa propone aprovecharlos desde el punto de vista de Fischbein (1975), como modelos generativos que “son los mejores dispositivos de enseñanza para la construcción de intuiciones secundarias” tanto en combinatoria como en el cálculo de probabilidades (p. 129). Tampoco hay referencias sobre si se esperan justificaciones o argumentaciones a respuestas, procedimientos y conceptos, por lo que no se puede deducir si el programa plantea la conversión y tratamiento de registros (Duval, 2017) producidos por el estudiante.

Los pocos recursos semióticos propuestos y los términos que se utilizan en el planteamiento del programa evocan los mundos de incorporación y simbólico propuestos por (Tall, 2013), pues parece que se espera un tratamiento operativo y simbólico de los conceptos en la resolución de problemas mediante reglas y algoritmos. Los tipos de tareas que el programa de estudios indica que el estudiante debe realizar, nos sugieren procesos mentales de reconocimiento y repetición (Tall, 2013). Algunos criterios de evaluación que propone el programa corresponderían a los procesos de identificación, inferencia de conclusiones y el mero cálculo de la probabilidad para problemas de los tipos ya citados.

Los términos que se utilizan en el programa sugieren que el estudiante debe categorizar conceptos (Bruner, 2001) y encapsular procedimientos (Tall, 2013), de manera que, al reconocer los recursos semióticos de referencia o al recuperarlos de los ya establecidos (*set befores*), pueda efectuar el tratamiento respectivo (identificar elementos implicados, relacionarlos y operarlos) según el concepto objeto de enseñanza, para solucionar problemas propuestos.

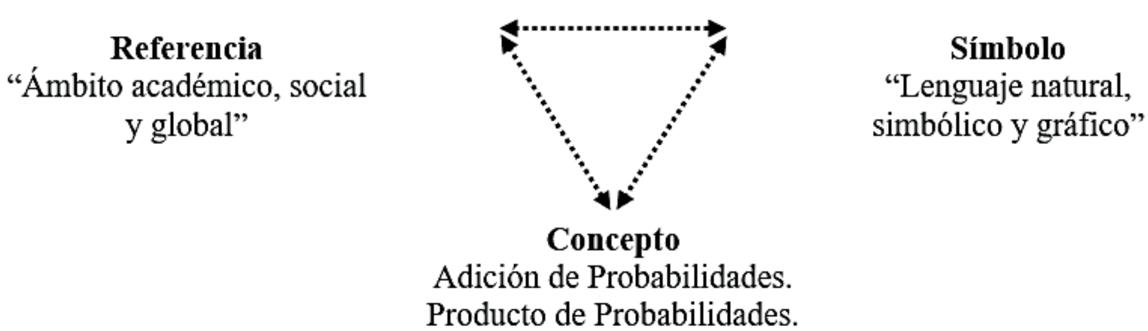
Tabla 2. *Caracterización de los temas de interés en el RAP2 de la unidad didáctica "Probabilidad" del programa de estudios (DEMS-IPN, 2008).*

Contexto de situaciones referentes	Ideas fundamentales de estocásticos	Recursos para organizar y (re) presentar los datos	Términos empleados	Otros conceptos matemáticos
Ámbitos académico, social y global (DEMS-IPN, 2008). Problemas rutinarios de contextos real, realista y matemático (Díaz y Poblete, 2001).	Medida de probabilidad. Campo de probabilidad. Adición de Probabilidades. Producto de probabilidades. Equidistribución y simetría. Combinatoria.	Lengua natural. Lengua escrita. Lenguaje numérico. "Lenguaje simbólico". "Lenguaje gráfico". (DEMS-IPN, 2008, p. 2)	Técnicas conteo. Probabilidad clásica y axiomática. Eventos cumplen axiomas de probabilidad. Probabilidad condicional. Eventos independientes. Excluyentes, no excluyentes, equiprobables. Identifica eventos aleatorios. Aplica conceptos y leyes. Aplica el cálculo de… Aplicada adecuadamente. Forma ordenada y precisa. Calculada correctamente. Induce a través de problemas.	Número y operaciones. Conjunto y operaciones.

Fuente: Elaboración propia.

Un análisis epistemológico (Steinbring, 2005) reveló que la falta de especificación de referentes y recursos semióticos propuestos pone en entredicho la interrelación de los tres vértices del triángulo epistemológico, necesaria para que los estudiantes adquieran las ideas de adición y de producto de probabilidades. Por lo que no se espera una construcción formal de los conceptos. La Figura 3 muestra el triángulo epistemológico aplicado a las ideas fundamentales en foco con sus interrelaciones en línea punteada.

Figura 3. *Triángulo epistemológico para las ideas en foco en el programa de estudios (DEMS-IPN, 2008).*



Fuente: Elaboración propia.

Resultados del análisis: Caso OG

La comprensión de OG de las ideas fundamentales de adición de probabilidades y de producto de probabilidades se caracterizó por sus respuestas en la entrevista relativas a sus resoluciones a los problemas del cuestionario. Para la pormenorización de los criterios de análisis en el caso OG, se tomó en cuenta su desempeño en la resolución y argumentación del problema 1, especificado en la Tabla 1.

OG resolvió de forma correcta el problema 1 utilizando la idea de adición de probabilidades y organizando los datos del problema en un diagrama de árbol. Un análisis de los registros (Duval, 2017) producidos por el estudiante para resolver el problema reveló su identificación de unidades matemáticamente significativas para realizar la conversión respectiva a lenguaje simbólico y a diagrama de árbol.

En la Tabla 3, se muestra la correspondencia de unidades matemáticamente significativas de OG en el tratamiento y conversión de sus registros; añadimos en negrita las unidades matemáticamente significativas que identificó OG, por la evidencia que él mismo nos proporcionó.

El registro simbólico producido por OG mezcla notación proposicional (~*r*) con notación de conjuntos ($A \cap r$) o ($A \cap {\sim}r$), por lo que se puede inferir un tratamiento meramente procedimental (repetición) para calcular la probabilidad de un evento. Por ello, no se puede asegurar que OG reconozca un evento propiamente como un subconjunto del espacio muestra Ω, que se asocie a la proposición ~*r*, o sea, como el subconjunto de posibilidades de Ω para las que la proposición "no contestó" (~*r*) se verifica. Ω tampoco fue señalada en el diagrama de árbol, por lo que se refleja su omisión del concepto de espacio muestra.

A partir del enunciado del problema, OG expresó por escrito su reconocimiento de parejas de eventos que se intersecan, sus cardinalidades explícitas en el enunciado del problema, las de los eventos, $n(A) = 138$, $n(B) = 288$ y del espacio muestra, $n(\Omega) = 426$, aunque este último no fue etiquetado explícitamente por OG. Con enfoque clásico determinó las probabilidades $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$, $P(r|A) = \frac{n(A \cap r)}{n(A)}$, $P({\sim}r|A) = \frac{n(A \cap {\sim}r)}{n(A)}$,

$P(r|B) = \frac{n(B \cap r)}{n(B)}$ y $P({\sim}r|B) = \frac{n(B \cap {\sim}r)}{n(B)}$.

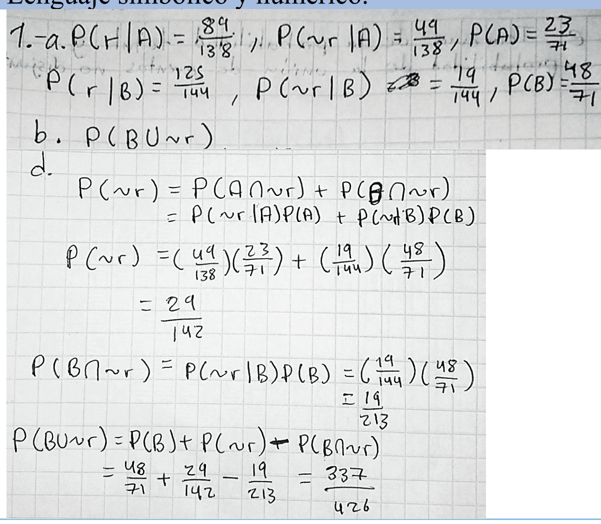
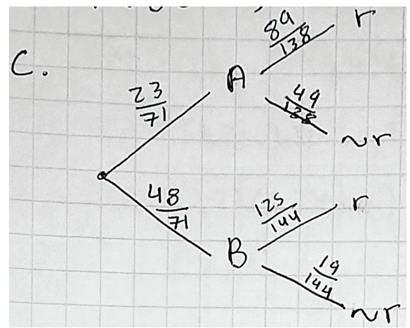
Sin embargo, no utilizó esas intersecciones en la expresión de la adición de probabilidades.

OG produjo un diagrama de árbol para representar y organizar los datos del problema, que corresponde a las probabilidades $P(A)$ y $P(B)$ para ponderar las ramas de primer orden de los eventos A y B, así como a las probabilidades condicionales $P(r|A), P({\sim}r|A), P(r|B)$ y $P({\sim}r|B)$ para ponderar las ramas de segundo orden de los eventos r y ${\sim}r$. La organización del diagrama de árbol guio a OG al cálculo de $P({\sim}r)$ con el "Teorema de la Probabilidad Total", al cálculo de $P(B \cap {\sim}r) = P(B) * P({\sim}r|B)$ y, finalmente, al cálculo de la adición de probabilidades para eventos no excluyentes, $P(B \cup {\sim}r) = P(B) + P({\sim}r) - P(B \cap {\sim}r)$.

Un análisis comunicativo (Steinbring, 2005) con cadena de significados y significadores (véase Figura 4) que obedeció a la interacción de OG durante la entrevista, reveló la dificultad del estudiante para identificar el término que se refiere a la probabilidad de la unión de eventos (adición de probabilidades) en la pregunta de problema. Se infirió el tratamiento operatorio de OG de una "fórmula" para el cálculo de la probabilidad de la unión de eventos en la que el registro principal es el diagrama de árbol y cuya expresión simbólica (que fue escrita incorrectamente y corregida) se muestra en la Tabla 3.

El estudiante argumentó "deduje la fórmula" al referirse a la expresión $P(B \cup {\sim}r) = P(B) + P({\sim}r) - P(B \cap {\sim}r)$, que aparentemente recordó por encuentros anteriores con ese tipo de problemas, lo que revela una heurística de disponibilidad.

Tabla 3. *Correspondencia de unidades matemáticamente significativas al en la resolución de OG del Problema 1.*

<table>
<tr><th colspan="2">Registro original:
Lenguaje natural y numérico (unidades aparentemente reconocidas por OG en negrita)</th></tr>
<tr><td colspan="2">Un encuestador contacta a personas de entre 18 y 25 años $(\boldsymbol{evento\ A})$, de las que 89 $\boldsymbol{n(A \cap r)}$ responden y 49 $\boldsymbol{n(A \cap \sim r)}$ se rehúsan a hacerlo $(\boldsymbol{\sim r})$. Cuando contacta a personas de entre 26 y 35 años $(\boldsymbol{evento\ B})$, 250 $\boldsymbol{n(B \cap r)}$ responden y 38 $\boldsymbol{n(B \cap \sim r)}$ se rehúsan $(\boldsymbol{\sim r})$. Se selecciona al azar una persona del total de la muestra. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una persona del rango de edad de 26 a 35 años o alguien que rehusó responder $\boldsymbol{P(B \cup \sim r)}$?</td></tr>
<tr><th>Registro producido por OG:
Lenguaje simbólico y numérico.</th><th>Registro Producido por OG:
Diagrama de árbol.</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

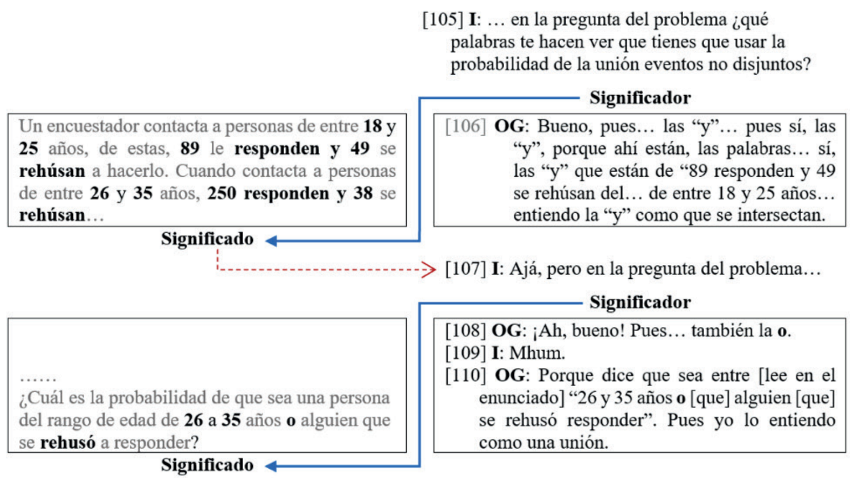
Fuente: Elaboración propia.

La comprensión de OG del problema 1 implicó una categorización con criterios de seguridad (Bruner, 2001) basados en la consecución de algoritmos probabilísticos sintetizados en dos tipos de registros semióticos: el diagrama de árbol y el simbólico. OG, además, realizó procesos de reconocimiento y repetición a través de un esquema de resolución que completó con los datos del problema.

Desde una perspectiva epistemológica, OG construyó la comprensión del problema a través de una categorización con criterios de seguridad (Bruner, 2001) basada en un algoritmo para resolver problemas referentes a probabilidad. La primera acción para el surgimiento de las ideas para resolver el problema por parte de OG consistió en reconocer el problema como de probabilidad. Luego, el estudiante identifica los eventos simples y su cardinalidad, para representarlos en un diagrama de árbol sin tener en cuenta la idea espacio muestra, pero poniendo en juego medida de probabilidad y producto de probabilidades.

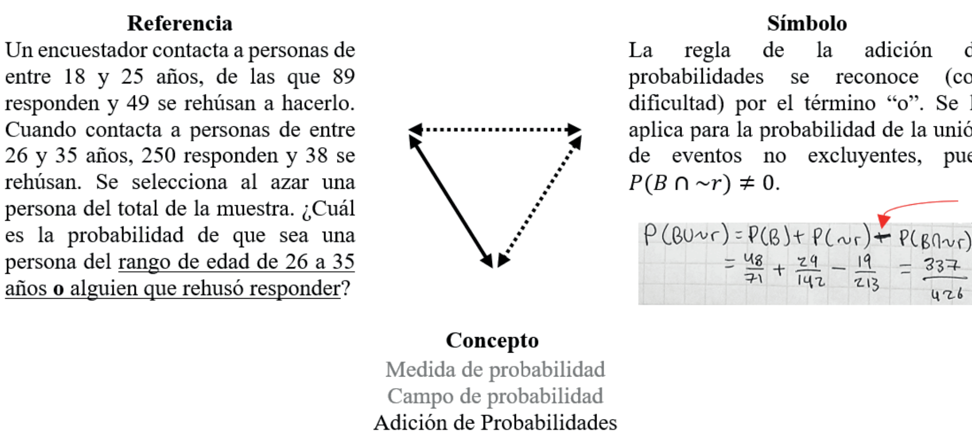
OG encapsuló (Tall, 2013) o en otras palabras categorizó (Bruner, 2001) una generalización de la estructura de diagrama de árbol que utiliza para resolver problemas referentes a probabilidad. La estructura consiste en identificar eventos condicionados por eventos simples y colocar la ponderación de ambos tipos de eventos en las ramas de primer orden (eventos simples) y las ramas de segundo orden (eventos condicionados). Para cada rama del árbol calcula el producto de probabilidades, multiplicando las ponderaciones de las ramas de primer y segundo orden. La primera idea explícita y cuya construcción se revela completa en un triángulo epistemológico correspondiente a la resolución del problema 1 por el estudiante es la de producto de probabilidades.

Figura 4. *Consecución de significados y significadores: reconocimiento de adición de probabilidades por OG.*



Fuente: Elaboración propia.

Figura 5. *Triángulo epistemológico adición de probabilidades en la resolución de OG del problema 1.*



Fuente: Elaboración propia.

Por otro lado, la idea fundamental de adición de probabilidades es referida por parte del estudiante como "probabilidad de eventos no disjuntos", lo que denota un enfoque en conjuntos. La identificación de esta probabilidad surge del uso de la palabra "o" en la pregunta del problema, y los eventos son identificados como "no disjuntos" porque su intersección no es vacía. Sin embargo, la construcción de la idea tiene rupturas en las relaciones entre referente-símbolo por la dificultad de reconocimiento y lenguaje del estudiante al tratar con el término disyuntivo; y en la relación concepto-símbolo, por su tratamiento simbólico con errores y omisiones de probabilidades que desembocan en una deficiencia operativa como se muestra en el triángulo epistemológico de la Figura 5.

■ Conclusiones

El programa de estudios de Bachillerato Tecnológico (DEMS-IPN, 2008) propone un enfoque clásico y determinista de la probabilidad e incluye las diez ideas fundamentales de estocásticos de Heitele (1975), pero no en espiral ni como guía. La secuencia de contenidos se realiza de forma modular e independiente, por lo que el estudiante no tendrá una noción general de las ideas fundamentales. El desarrollo de las ideas enfoca a la probabilidad como procedimientos de cálculo, por lo que enfatiza en ellos más que en conceptos.

La falta de especificaciones para los registros semióticos planteados en el programa de estudio puede ocasionar dificultades para la adquisición de conceptos, debidas a la falta de énfasis en incluir una variedad de esos registros que dé lugar a los procesos de producción de cada uno de ellos, tratamiento a su interior y conversión de uno en otro (Duval, 2017). Por otro lado, los recursos semióticos propuestos y los términos utilizados evocan los mundos de incorporación y simbólico (Tall, 2013) y los tipos de tareas sugieren los procesos de reconocimiento y repetición.

La propuesta del programa de estudios augura una construcción del concepto por el estudiante compartimentalizada, incompleta, derivada, además de la falta de continuidad con las propuestas de los niveles educativos anteriores, de una ruptura entre las ideas fundamentales de estocásticos y los recursos semióticos para organizar y representar datos.

OG evoca la idea de adición de probabilidades mediante la probabilidad de la unión de eventos no disjuntos y se situó en el mundo de incorporación simbólico para la idea. El estudiante categorizó la idea de adición de probabilidades a través de la probabilidad de la unión de eventos y la encapsuló mediante el algoritmo que responde a su "fórmula", sin embargo, sus dificultades en el uso del lenguaje formal, derivadas de heurísticas de disponibilidad, contribuyeron a errores en la definición del concepto.

Para el estudiante, la comunicación de la idea fundamental de adición de probabilidades corresponde a enumerar los pasos para resolver problemas de ese tipo, a diferencia de su mejor operación de la conjunción, de su uso de sinónimos y mayor fluidez en sus argumentaciones durante su interacción con el investigador. Además, el tratamiento algorítmico de la idea de producto de probabilidades es más fluido, lo que puede deberse al algoritmo de resolución de problemas referentes a la probabilidad, el cual se basa, independientemente del tipo de combinación de probabilidades, en un diagrama de árbol.

La idea de producto de probabilidades se evoca a través del entendimiento de la probabilidad de la intersección de eventos y el uso de la probabilidad condicional.

El estudiante identifica y representa fácilmente esas dos probabilidades en un diagrama de árbol, esta identificación le permite resolver problemas de ese tipo de forma inmediata. Para la idea de producto de probabilidades, el estudiante se situó en el mundo simbólico, su categorización definitoria, encapsulación de procedimientos y tratamiento de registros semióticos, sugieren establecimientos anteriores de la idea.Se propone una estrategia de enseñanza para las diez ideas fundamentales de estocásticos de forma continua a lo largo de un currículo en espiral con adaptaciones en la continuidad y la integralidad del área y cambios hacia un enfoque que promueva la aleatoriedad.

Esta estrategia debe favorecer el carácter extensional de la probabilidad como resultado de sus axiomas al enseñar la idea de adición de probabilidades, su relación con el tercer axioma de probabilidad y la unión de eventos, así como el producto de probabilidades, su relación con la probabilidad condicional y teorema de Bayes, proponiendo variedad de situaciones de referencia y registros semióticos en ejemplos y problemas, que favorezcan cada idea de acuerdo con su necesidad.

Referencias bibliográficas

Bruner, J. (2001). *El proceso mental en el aprendizaje*. Narcea Ediciones.

Cortés, G. y García, S. G. (2003). *Investigación documental: guía de autoaprendizaje apuntes y ejercicios.* ENBA-DGES-SEP.

Dirección de Educación Media Superior, Instituto Politécnico Nacional (DEMS-IPN) (2008). *Programa de Estudios de la unidad de Aprendizaje: Probabilidad y Estadística*. IPN.

Díaz, M. y Poblete, A. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, 45, 33-41.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations*. Springer.

Fischbein (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Reidel.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, *6*(2), 187-205. https://doi.org/10.1007/bf00302543

Martínez, R. (2018). *El enfoque frecuencial de la probabilidad en el bachillerato tecnológico* [Tesis de maestría no publicada]. Cinvestav.

Ojeda, A. M. (1994). *Understanding Fundamental Ideas of Probability at Pre-university Levels*. [Unpublished doctoral dissertation]. King´s College London.

Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. *Matemática Educativa, treinta años*, 195-204.

Piaget, J., & Inhelder, B. (2014). *The origin of the idea of chance in children (Psychology revivals)*. Psychology Press. https://doi.org/10.4324/9781315766959

Rodríguez, G., Flores, J. y García, E. (1996). *Metodología de la Investigación Cualitativa.* Ediciones Aljibe.

Salcedo, J. (2013). *Razonamiento probabilístico en el bachillerato tecnológico* [Tesis de maestría no publicada]. Cinvestav.

Steinbring, H. (2006). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: An epistemological perspective*. Springer Science & Business Media. https://doi.org/10.1007/s10649-006-5892-z

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics*. Cambridge University Press.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psychological Review*, *90*(4), 293-315. https://doi.org/10.1037/0033-295x.90.4.293

Zazkis, R., & Hazzan, O. (1998). Interviewing in mathematics education research: Choosing the questions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(4), 429-439. https://doi.org/10.1016/s0732-3123(99)00006-1