

FLEXIBILIDADE COGNITIVA E RITMO INDIVIDUAL: ESTUDO DA OTIMIZAÇÃO POR MEIO DA NOÇÃO DE DERIVADA

COGNITIVE FLEXIBILITY AND INDIVIDUAL RHYTHM: STUDY OF OPTIMIZATION THROUGH THE NOTION OF DERIVATIVES

Marlene Alves Dias, Valdir Bezerra dos Santos Junior, Renato da Silva Ignácio
Instituto Federal do Ceará, Universidade Federal de Pernambuco, Universidade Federal de
Campina Grande. (Brasil)
maralvesdias@gmail.com, valdir.bezerra@gmail.com, renatosignacio@gmail.com

Resumo:

Apresentamos o extrato de uma pesquisa em andamento, de uma aula sobre aplicação da noção de derivada, na disciplina de Cálculo para o curso de Engenharia, na modalidade remota devido à pandemia. Investigamos as necessidades dos estudantes nesta modalidade em termos de ritmo individual e flexibilidade de conhecimentos. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, realizada por um grupo de oito professores que participaram como alunos. Os resultados tendem a mostrar que, além das dificuldades associadas aos conhecimentos prévios e aos novos conhecimentos matemáticos, as mudanças do meio, do papel do aluno e do professor e o tempo didático interferem no desenvolvimento do curso.

Palavras-chave: autonomia, tetraedro didático, teoria da ação conjunta, “*Mathématique*”

Abstract:

We present an extract from ongoing research, from a class on the application of the notion of derivative, in the discipline of Calculus for the Engineering course, in the remote mode due to the pandemic. We investigated the needs of students in this modality in terms of individual rhythm and flexibility of knowledge. This is qualitative research, carried out by a group of eight teachers who participated as students. The results tend to show that, in addition to the difficulties associated with previous knowledge and new mathematical knowledge, changes in the environment, in the role of the student and teacher and the teaching time interfere in the development of the course.

keywords: autonomy, didactic tetrahedron, theory of joint action, “*Mathématique*”



Introdução

Desde a década de 1990 temos desenvolvido trabalhos sobre a flexibilidade cognitiva em Matemática, por nós considerada como a capacidade do estudante em articular as diferentes formas de conhecimento e suas representações sem a necessidade de um apelo explícito. Mais recentemente, em função da necessidade de desenvolver o curso na modalidade remota devido a pandemia, e considerando às dificuldades dos estudantes em manter o ritmo de estudo devido a falta de contato mais próximo com professor e colegas de turma, nos deparamos com a noção de “*idiorritmie*” ou ritmo individual, que nos auxiliou a melhor compreender essa nova condição de ensino e aprendizagem.

A noção de “*idiorritmie*” é introduzida por Ravestein (2011) a partir dos arquivos em áudio das aulas de Barthes (1976-1977, apud Ravestein (2011)) que, segundo o autor, corresponde a uma noção que tenta iluminar uma zona que se encontra entre duas formas de vida, de um lado a vida solitária, por exemplo, do eremita e por outro lado, uma vida comunitária, ou seja, a “*idiorritmie*” corresponde a uma forma mediana e utópica entre ao solitário e o comunitário. O autor esclarece que essa noção é marginalizada nas escolas comuns por meio das classes e das sequências de conteúdos disciplinares que decompõem os percursos escolares.

A partir das noções de flexibilidade cognitiva em Matemática e de “*idiorritmie*” acima consideradas e da necessidade de desenvolvimento de aulas de Cálculo Diferencial e Integral de forma remota para os cursos de Engenharia devido à pandemia, consideramos como problemática da nossa pesquisa as dificuldades que poderiam ser enfrentadas pelos estudantes devido a falta de interação entre professores e colegas de turma, em particular, quando consideramos a noção de derivada de uma função na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, que no Brasil é introduzida no primeiro ano dos cursos de Engenharia, determinando assim a articulação de conhecimentos intra e extra matemáticos de forma flexível e exigindo do estudante um ritmo diferente daquele que estava habituado durante a Educação Básica, o que nos conduziu a considerar as seguintes questões de pesquisa:

- Quais as necessidades de um grupo de professores de Cálculo Diferencial e Integral experientes em termos de ritmo e flexibilidade cognitiva quando estão diante de novas condições de ensino, isto é, na modalidade a remota, imposta pela pandemia?
- Como transpor essas necessidades quando da construção de nossas aulas para estudantes de Cálculo Diferencial e Integral do primeiro ano do curso de engenharia?

Ao considerarmos como problemática a necessidade de articulação de conteúdos intra e extra matemáticos e a necessidade de estudos sobre o processo de ensino e aprendizagem na modalidade remota, observando ainda que a noção de “*idiorritmie*” pode nos indicar o que ocorre entre o tempo individual dos estudantes em um curso na modalidade remota e o tempo em comunidade virtual e/ou presencial, acreditamos que compreender o ritmo individual e as expectativas dos professores em relação aos conhecimentos prévios pode nos auxiliar a responder as questões acima apresentadas.

Para isso, focamos nosso estudo na identificação das necessidades e dificuldades dos professores como meio para modelar o desenvolvimento de nossas aulas junto aos estudantes do primeiro ano do curso de engenharia para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, uma vez que é o primeiro contato desses estudantes com a noção de derivada de uma função. Sendo assim, estão em jogo a introdução de um novo conhecimento e de aplicações do mesmo para uma área específica. Logo, nossa experiência tem mostrado que além das dificuldades sobre conhecimentos prévios que muitos ainda não são capazes de mobilizar, é preciso um empenho maior de professores e estudantes, para ultrapassar as dificuldades impostas pela apropriação de um novo conhecimento e das aplicações associadas à nova área de conhecimento, a saber: a engenharia. Todas essas dificuldades são potencializadas pela necessidade de estudo solitário.

Num primeiro momento, que apresentamos neste extrato de pesquisa, tratamos apenas das interações entre professores, uma vez que nosso objetivo identificar as regularidades e diferenças, mais particularmente, em relação ao ritmo de um grupo de professores de Matemática, funcionando como estudantes solitários, que se propuseram a estudar a noção de otimização associada ao conceito de derivada por meio de um material construído para ser desenvolvido em uma aula online, anotando seus tempos de estudo, suas pesquisas em relação à conceitos e noções esquecidas e suas reflexões considerando sua posição enquanto estudante.

Para tal, escolhemos como referencial teórico a Teoria da Ação Conjunta (TACD) de Santini e Sensevy (2010), mais particularmente, os descritores cronogênese, topogênese e mesogênese, considerados pelos autores segundo definições de Chevallard (1991), a saber: a cronogênese descreve o avanço dos saberes na classe, isto é, o funcionamento do tempo didático. A topogênese descreve as responsabilidades assumidas pelo professor e pelo estudante, quando se trata dos saberes em jogo, ou seja, a divisão epistêmica. A mesogênese descreve a construção do meio ou a sucessão dos meios na classe.

Trata-se de uma pesquisa qualitativa, cujo método foi o do estudo de caso singular, conforme Yin (2005), pois analisamos um fenômeno contemporâneo em contexto da vida real.

A aula correspondeu a uma proposta em termos de metodologia de estudo de caso, para a qual os estudantes foram oito professores de Matemática com diferentes formações, que poderiam revisitar a noção de otimização a partir do conceito de derivada de uma função com facilidade, porque estávamos interessados no modo como eles iriam desenvolver o estudo solitário e não nos bloqueios relacionados a dificuldades com o conteúdo, uma vez que a aplicação proposta exigia a disponibilidade das definições, regras e leis e teoremas sobre derivada de uma função implícita e suas representações.

Na sequência apresentamos uma breve descrição do referencial teórico utilizado na pesquisa.

Referencial teórico

O referencial teórico da pesquisa é centrado nas noções de flexibilidade cognitiva em Matemática segundo definição de Dias (1998) e “*idiorritmie*” segundo Ravestain (2011), sendo complementado pela Teoria da Ação Conjunta conforme Santini & Sensevy (2010),

mais particularmente dos descritores cronogênese, topogênese e mesogênese definidos por Chevallard (1991) e a noção de “*mathématique*” das redes digitais concebida por Frayssinhes (2016) a partir da definição de apresentada em um trabalho póstumo de Comenius publicado em 1680, como veremos na sequência.

A noção de flexibilidade cognitiva em Matemática segundo Dias (1998) corresponde à capacidade de trabalhar em diversos quadros podendo mudar de quadro quando necessário sem que para isto seja feito nenhum apelo explícito, o que conduz a utilizar a representação adequada para a resolução de uma determinada situação, a articular diferentes pontos de vista e a saber planejar, analisar, desenvolver e justificar o trabalho matemático que permite resolver a situação.

Observamos aqui que a noção de quadro corresponde à definição de Douady (1992), a saber: um quadro é constituído de objetos de um ramo das matemáticas, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais associadas a estes objetos e estas relações. Estas imagens têm um papel essencial e funcionam como ferramentas dos objetos do quadro. Dois quadros podem conter os mesmos objetos e diferir pelas imagens mentais e problemáticas desenvolvidas.

Ao efetuar uma mudança de quadro, em geral, precisamos trabalhar com diferentes registros de representação semiótica isto é, segundo Duval (1995) necessitamos de diferentes registros que permitam realizar as três atividades cognitivas fundamentais (formação de uma representação, tratamento e conversão), uma vez que é a *semiósis* que por meio da produção de uma representação semiótica possibilita a aprendizagem conceitual de um objeto que corresponde à *noésis*, o que torna a *noésis* inseparável da *semiósis*, logo todo ensino de Matemática precisa ser organizado de maneira a considerar essa forte ligação entre *semiósis* et *noésis*.

Ressaltamos ainda que o planejamento, análise, desenvolvimento e justificativa do trabalho matemático depende do nível de conhecimento esperado dos estudantes, aqui considerado segundo definição de Robert (1998), ou seja, os níveis: técnico, mobilizável e disponível.

O nível técnico correspondendo a um trabalho isolado, local e concreto. Está relacionado principalmente às ferramentas e definições utilizadas em uma determinada tarefa.

O nível mobilizável correspondendo a um início de justaposição de saberes de determinado quadro, podendo até corresponder a uma organização, vários métodos podem ser mobilizados. O caráter ferramenta e objeto, segundo definição de Douady (1992) do conceito estão em jogo, mas o que se questiona é explicitamente pedido. Se um saber é identificado, ele é considerado mobilizado se ele é acessível, isto é, se o estudante o utiliza corretamente.

O nível disponível correspondendo a saber responder corretamente o que é proposto sem indicações, de poder, por exemplo, dar contra-exemplos (encontrar ou criar), mudar de quadro (fazer relações), aplicar métodos não previstos. Este nível de conhecimento está associado à familiaridade, ao conhecimento de situações de referência variadas que o estudante sabe que as conhece (servem de terreno de experimentação), ao fato de dispor de referências, de questionamentos, de uma organização. Podendo funcionar para um único problema ou possibilitando fazer resumos.

Para melhor compreender a diferença de ritmo de estudo entre as modalidades presencial e remota consideramos a noção de “*idiorritmie*” segundo Ravestein (2011), a saber: “gestão individual do espaço e do tempo com suas relações às regras de uma instituição” que nos auxiliou a nos questionar e tentar compreender as dificuldades encontradas pelos estudantes sobre plataformas de ensino a distância desde o desenvolvimento da Internet, uma vez que o autor se interroga sobre: 1) a necessidade de inventar, atualizar ou visitar alguns conceitos didáticos de modo a desenvolver novos modelos teóricos de implementação e trabalho dessa nova forma de ensino e aprendizagem. 2) que nessa nova modalidade (estudantes e professor a distância, o que consideramos válido para o ensino remoto) é preciso recuperar as interações didáticas e afetivas entre professor e estudantes de forma que estas sejam mais diretas e vivas, o que se tem tentado por meio da utilização de *chat*, *fóruns* e *email*. Além disso, é preciso assegurar o tempo de aprendizagem pessoal do estudante que quase nunca corresponde ao tempo oficial da instituição, para tal o autor propõe que professor e estudantes nos forneçam seus respectivos tempos de trabalhos, ou seja, em pequenas sequências ou em sequências longas mais raras. 3) que é preciso criar um *ambiente de estudo*, o que segundo (Johsua; Félix, 2002) exige que o estudante estabeleça relações com determinados objetos de conhecimento mais ou menos explicitados na instituição. O que significa, por exemplo - muito concretamente - estudar uma lição em casa para um estudante universitário?

A partir desses três questionamentos o autor inicia sua pesquisa cujo objetivo é contribuir para o desenvolvimento das teorias necessárias ao aperfeiçoamento dos dispositivos de ensino a distância. Isso conduz Ravestein a considerar a noção de autonomia e a tecer certo número de vínculos entre autonomia e “*idiorritmie*”, o que conduziu ao seguinte questionamento: de que forma e em que medida devemos regrar ou regular a relação entre o estudante a distância e a instituição que oferece a formação, quando precisamente esta opta por esta modalidade de formação como *a priori* mais “livre”?

Ravestein ressalta ainda que o estudante precisa criar seu ambiente de estudo, isto é, organizar um espaço “*idiorritmique*” que depende do reconhecimento de sua própria autonomia, o que terá consequências sobre seu modo de vida. Como exemplo, o autor considera a questão de utilização do computador doméstico, quando dividido com os outros membros da família.

Para melhor compreender a relação professor e estudante quando desenvolvemos nossas atividades segundo o modelo a distância ou modelo remoto, no qual o modelo remoto utilizado durante a pandemia era ainda mais solitário e dependente da autonomia e “*idiorritmie*” esperada do trabalho individual de cada estudante, optamos incorporar ao nosso referencial teórico a Teoria da Ação Conjunta (TACD) segundo definição de Santini & Sensevy (2010), que segundo os autores corresponde as interações didática entendidas como *transações* a propósito dos saberes em jogo, entre uma instância Professor P e uma instância Estudante E. Eles observam ainda que se a ação didática é certamente uma ação conjunta entre P e E, não podemos compreender *a priori* a ação de um dos dois sem referi-la a do outro.

Assim, o prefixo *trans-* significa que a ação didática adquire sua forma, para o professor “por meio” do estudante, e, para o estudante, “por meio” do professor. Ela deve, portanto,

incitar aquele que descreve a ação didática do professor ou do estudante a pesquisar seu “complemento” na ação do outro com o objetivo de melhor compreendê-las.

A noção de jogo de aprendizagem é caracterizada por Santini & Sensevy (2010) por meio das noções de contrato didático e meio (*milieu*) didático segundo Brousseau (1998). A noção de contrato didático descreve o sistema de expectativas recíprocas entre o professor e os estudantes a propósito do saber; a noção de meio (*milieu*) do sistema dos possíveis e dos necessários que constituem o ambiente ao mesmo tempo material e simbólico da ação didática.

Santini e Sensevy (2010) consideram ainda como constructo teórico da Teoria da Ação Conjunta (TACD) os descritores cronogênese, topogênese e mesogênese, considerados pelos autores segundo definições de Chevallard (1991), a saber:

- A cronogênese descreve o avanço dos saberes na classe, isto é, o funcionamento do tempo didático, isto é, ela organiza a temporalização das aprendizagens pelos estudantes.
- A topogênese descreve as responsabilidades assumidas pelo professor e pelo estudante, quando se trata dos saberes em jogo, ou seja, a divisão epistêmica, ou seja, ela divide as responsabilidades, em relação ao saber, entre professor e estudante, e portanto seus respectivos lugares.
- A mesogênese descreve a construção do meio (*milieu*) ou a sucessão dos meios na classe, ou seja, ela designa a reelaboração contínua do meio (*milieu*) através do sistema de objetos materiais e simbólicos que os estudantes são confrontados para aprender.

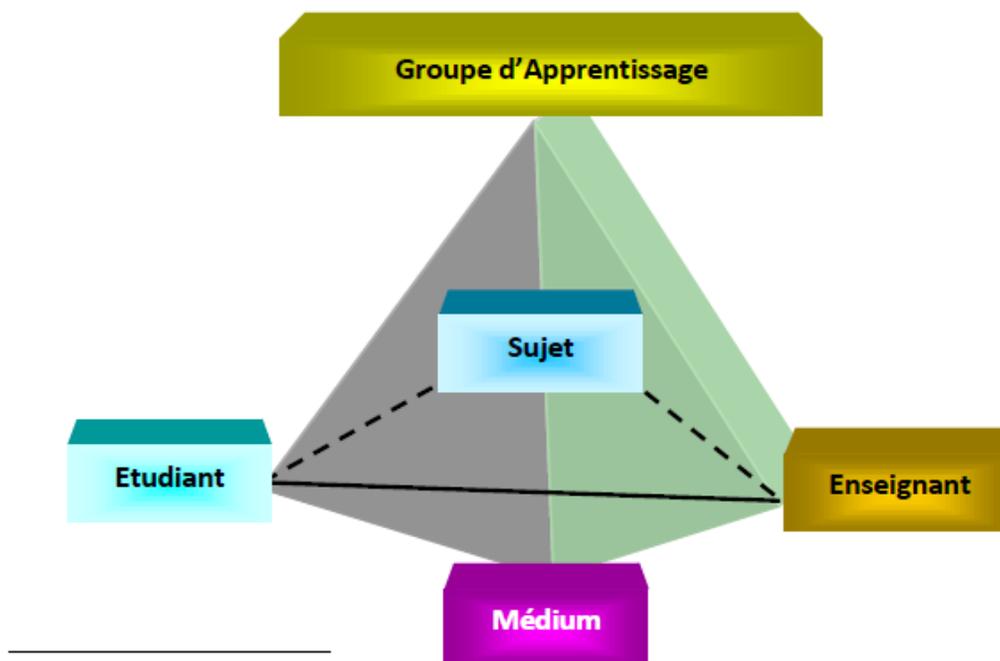
Por se tratar de um estudo associado ao processo de ensino e aprendizagem na modalidade remota, consideramos também a noção de “*mathématique*” conforme concepção de Frayssinhes (2016) que após explicitar que o termo “*mathématique*” foi introduzido por Comenius em um trabalho póstumo publicado em 1680, no qual a didática é referida como “o ensino da arte” e a “*mathématique*” como “o aprendizado da arte”, isto é para Comenius, a didática representava a ciência do ensino, e a “*mathématique*” era seu antônimo, isto é, a ciência da aprendizagem.

Sendo assim, Frayssinhes (2016) formaliza a “*mathématique*” específica das redes digitais como o resultado transdisciplinar da neuro-pedagogia, metacognição / reflexividade, estilos de aprendizagem, autoaprendizagem, motivação, atenção, desempenho e o prazer de aprender, isto é, esses oito itens são interrelacionados e interpenetrados de forma a alcançarmos a transdisciplinaridade. Para tal, o autor considera a noção de transdisciplinaridade devida a Nicolescu (2012), a saber: uma postura epistemológica, cujo objetivo é a compreensão do mundo atual, um dos imperativos dos quais é a unidade do conhecimento.

A noção de “*mathématique*” das redes digitais formalizada por Frayssinhes coloca em evidência as dificuldades de estudos remotos ou a distância, uma vez que a compreensão das novas propostas de ensino do mundo atual é complexa e vão além das disciplinas, necessitando pesquisas que auxiliem a compreendê-las.

Outro constructo teórico que pode auxiliar-nos a compreender melhor a importância dos diferentes atores na ação didática quando esta se realiza por meio das modalidades remota, a distância ou híbrida é o *tetraedro centrado* de Jaillet (2004) que transformou o triângulo pedagógico de Houssaye adicionando dois polos aos três polos (estudante, saber, professor), a saber: o grupo de aprendizagem e o ambiente tecnológico.

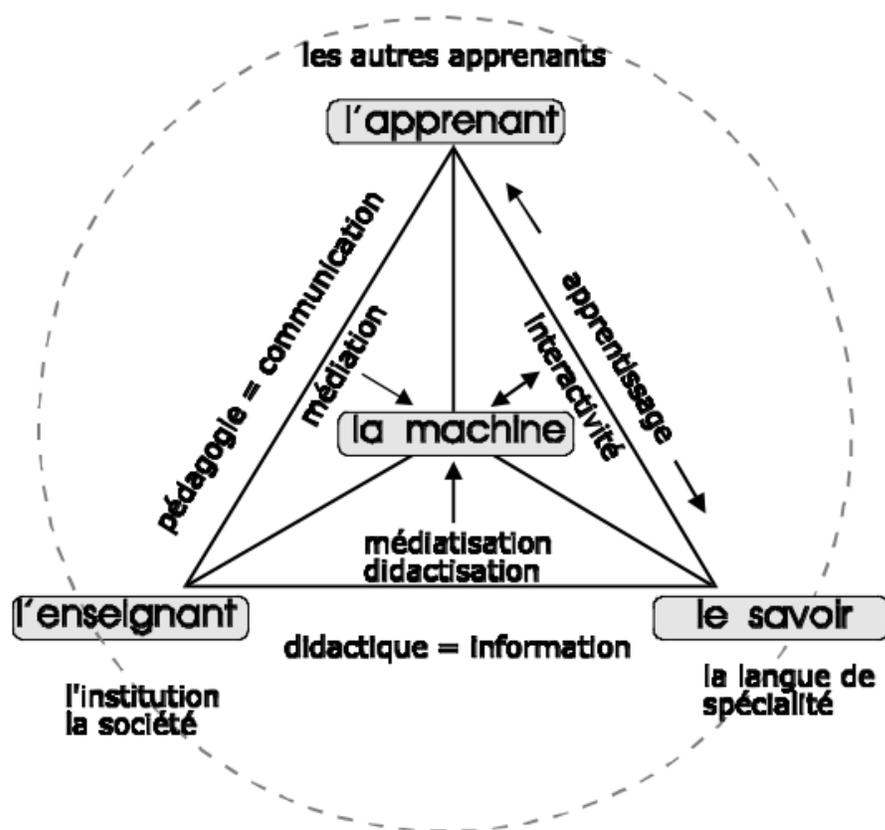
Figura 1. *Tetraedro Centrado.*



Fonte: Frayssinhes (2012, p. 8, apud Jaillet (2004), p. 35).

Da mesma forma que Jaillet (2004) transforma o triângulo pedagógico em tetraedro centrado, encontramos o tetraedro didático pedagógico desenvolvido por Rézeau (1998) no qual o autor considera o triângulo pedagógico – didático, cujos três polos são: aprendiz, professor e saber, e introduz o novo polo máquina (no caso o computador). O autor completa indicando o papel das relações entre professor, aprendiz e saber consideradas no triângulo e ampliando essas relações para o tetraedro no qual o aprendiz é um sujeito do grupo de aprendizes, o professor é representado pela instituição e pela sociedade e o saber, no caso a língua de especialidade, seu objeto de estudo. As relações dos polos do triângulo com o polo máquina são: mediação (pedagogia, máquina), mediação didatização (didática, máquina) e interatividade para aprendizagem, o que ressalta as diferenças para a formação por meio das modalidades remota, a distância e híbrida, evidenciando a necessidade de estudos sobre o tema de forma a preparar professores e materiais apropriados a esse grupo de aprendizes e explicitar que o papel do aprendiz está associado a uma interatividade independente e autônoma que permita interagir com o professor e com o grupo de aprendizes nos momentos dedicados a essa participação conjunta.

Figura 2. Tetraedro Didático Pedagógico.



Fonte: Rézeau (1998, p. 104).

Na sequência apresentamos brevemente a metodologia da pesquisa.

Metodologia da pesquisa

Trata-se de uma pesquisa qualitativa conforme Godoy (1995), cujo método foi o do estudo de caso singular, conforme Yin (2005), pois analisamos um fenômeno contemporâneo em contexto da vida real.

Godoy (1995) ressalta que a pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como instrumento fundamental, sendo a preocupação fundamental desse tipo de estudo o contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo estudada. Trata-se de uma pesquisa descritiva, cuja preocupação é a compreensão ampla do fenômeno em estudo, o que conduz a considerar todos os dados importantes a serem examinados, de forma a compreender o processo e não simplesmente apresentar um resultado, observando como o fenômeno se manifesta nas atividades, procedimentos e interações diárias. A autora ressalta que estudos em que se procura compreender o fenômeno na sua complexidade são, em geral, os mais indicados para uma análise qualitativa, o que nos conduziu a considerar esse tipo de pesquisa.

Para tal, utilizamos o método de estudo de caso singular conforme Yin (2005) que explicita se tratar de *"...uma forma de se fazer pesquisa empírica que investiga fenômenos contemporâneos dentro de seu contexto de vida real, em situações em que as fronteiras entre o fenômeno e o contexto não estão claramente estabelecidas, onde se utiliza múltiplas fontes de evidência"* Yin (2005). Ressaltamos aqui que Godoy (1995a) observa que o objetivo desse tipo de pesquisa é aprofundar o estudo de determinado fenômeno, por meio de situações típicas ou não usuais, cujo objetivo é responder "como" e "por quê" determinados fenômenos ocorrem, em particular quando se tem pouca possibilidade de controle do fenômeno estudado e seu foco são fenômenos atuais, o que se enquadra na nossa proposta de pesquisa.

Para realizar a pesquisa foi proposto a oito professores de matemática com experiência no ensino da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral para os primeiros anos do ensino superior, sendo que três deles também tinham experiência mais específica de ministrar essa disciplina para os primeiros anos dos cursos de engenharia, o que os conduzia a integrar exemplos das diferentes opções de escolha futura dos estudantes desses cursos, sendo que esses exemplos poderiam ser tratados pelos cinco outros professores para tratar de aplicações, uma vez que, existem casos em que a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral é ministrada para estudantes de diferentes cursos.

A aula correspondeu a uma proposta em termos de metodologia de estudo de caso, para a qual os participantes foram oito professores de matemática com formações em Matemática e Engenharia, que poderiam revisitar a noção de otimização a partir do conceito de derivada de uma função com facilidade, porque estávamos interessados no modo como eles iriam desenvolver o estudo solitário e não nos bloqueios relacionados às dificuldades com o conteúdo, uma vez que a aplicação proposta exigia a disponibilidade das definições, regras e leis e teoremas sobre derivada de função explícita e implícita e suas representações.

O material enviado aos participantes foi uma orientação composta de três etapas da forma como se propões aos estudantes para realizarem o estudo, ou seja, na primeira etapa indicasse que os estudantes precisam estudar o capítulo 4 do livro de Cálculo I de Stewart (2010) indicado nas referências bibliográficas do curso, para na sequência acessarem o vídeo de uma hora e trinta minutos com quatro situações de otimização que necessitavam de conhecimentos sobre derivada de funções implícitas e explícitas, o que corresponde a segunda etapa. O estudo e desenvolvimento das situações apresentadas no vídeo poderiam ser analisados e avaliados pelos professores diretamente ou eles poderiam estudar uma situação de cada vez, o que nos indicaria a preferência em termos de ritmo. Além disso, foi indicado o livro de Cálculo I de Stewart (2010) para início do estudo e consulta. Observamos que o livro indicado é conhecido de professores e estudantes, sendo o mais recomendado nos planos de ensino dos cursos em que a disciplina de Cálculo faz parte do currículo e de onde foram retiradas as situações o que poderia auxiliar aqueles que precisassem atualizar seus conhecimentos.

Exemplo da situação 1: Um fazendeiro quer cercar uma área de $15\ 000\text{ m}^2$ em um campo retangular e então dividir ao meio com uma cerca paralela a um dos lados do retângulo. como fazer isso de modo a minimizar o custo da cerca?

Observamos que se trata de um tipo de situação já encontrada no ensino médio, resolvida por meio da noção de ponto de máximo e mínimo de uma função quadrática, o que poderia ser utilizado pelos professores. No caso, por estar associada ao estudo da noção de derivada de uma função, para compreender a solução apresentada o estudante precisa dispor da noção de área de um retângulo e compreender os dados da situação para encontrar a função que deseja maximizar. Após determinar a função é preciso aplicar a noção de primeira derivada de uma função em um ponto para determinar os pontos críticos e na sequência determinar a segunda derivada para determinar o ponto de mínimo e, conseqüentemente o custo da cerca.

Trata-se de uma situação na qual a noção de derivada de uma função em um ponto é introduzida no primeiro ano do curso de Cálculo no Brasil, o que torna a questão disponível se consideramos a utilização apenas da noção de função quadrática, mas que auxilia a motivar o estudo da noção de derivada de uma função em um ponto e mostrar que o novo método permite determinar máximos e mínimos de diferentes tipos de funções, não se restringindo apenas às funções quadráticas.

Na terceira etapa foi proposta uma lista de atividades a serem resolvidas pelos estudantes após o estudo das suas etapas precedentes.

Resultados

Os resultados mostram que os professores, mesmo dispondo dos conhecimentos necessários para o estudo proposto, ao analisarem a aula utilizando o material indicado, precisaram parar em alguns momentos e refazer a solução das atividades desenvolvidas no material para compreender qual o caminho utilizado pelo professor.

Em alguns casos, seus métodos eram diferentes e isso os conduziu a propor novos encaminhamentos, o que auxiliou na reflexão sobre as dificuldades que os estudantes poderiam encontrar. Além disso, observaram a existência de diferentes tipos de representações para o conceito de derivada de uma função, mais particularmente, para o caso da função implícita, o que parece mostrar a importância de associar o conceito a suas diferentes representações.

Em relação à questão do ritmo e flexibilidade cognitiva em Matemática foi possível identificar dificuldades em termos de adequação à gestão individual do espaço e do tempo com seu modo de vida, o que os conduziu a estudar o material proposto situação por situação, uma vez que a organização por eles considerada precisou levar em conta os tempos livres relacionados ao trabalho e dedicação a família, o que nos parece uma discussão importante para o desenvolvimento de cursos em modalidades que exigem que o participante crie seu próprio ambiente de estudo.

Em relação a flexibilidade cognitiva em Matemática, ficou ainda mais evidente a importância de os estudantes disporem dos conhecimentos supostos disponíveis quando da introdução de novos conhecimentos, uma vez que os professores puderam identificar novos meios e outros saberes que poderiam ser utilizados quando da solução das situações propostas.

Observamos aqui que a dificuldade em tratar as diferentes representações da noção de derivada podem ser ainda mais sentidas pelos estudantes brasileiros, pois esses têm o primeiro contato com o conceito de derivada no Ensino Superior, num curso em que são revisitadas algumas funções de uma variável real a valores reais e suas propriedades e, na sequência, é introduzido o conceito de derivada desse tipo de função, suas regras e leis, seus teoremas e, na sequência, são tratadas as funções implícitas que proporcionam exemplos de aplicações interessantes intra e extra matemáticas, mas essas aplicações necessitam de uma mobilização de conhecimentos que muitas vezes ainda estão em construção pelos estudantes.

Os resultados tendem a mostrar que para um primeiro curso de Cálculo, considerando que os estudantes são iniciantes nesse domínio, o curso exige uma mobilização de conhecimentos que podem bloquear os estudos, em particular, daqueles que ainda dependem da validação de seu desenvolvimento matemático pelos professores, ou seja, aqueles que ainda não tratam as situações e tarefas matemáticas de forma autônoma e cujo ritmo não está de acordo com o esperado pelos professores.

Em geral, os estudantes brasileiros precisam de mais tempo para compreender o conceito de derivada, suas representações, suas regras e leis e os teoremas que lhes são associados e, além disso, ao se inserirem ou serem inseridos no estudo a distância ou remoto respectivamente, sendo o ensino remoto uma realidade de todos os estudantes durante a pandemia, por opção ou não, estão iniciando seus estudos em uma nova modalidade, na qual a mesogênese é diferente da forma e meios com os quais estavam habituados desde a Educação Básica, na qual o professor era o responsável pelo desenvolvimento desse meio (mesogênese) e do tempo didático (cronogênese). Apesar de a mesogênese ser de certa forma orientada pelo professor, fica a cargo dos estudantes a responsabilidade sobre a construção do seu próprio conhecimento (topogênese) auxiliado pelo professor que exercerá o papel de mediador da ação didática.

Observamos aqui que no ensino a distância os estudantes dispõem de um tutor para enviarem suas questões, o que nos conduz a enfatizar a necessidade de que esse tutor tenha uma formação matemática de base, pois as questões no caso, muitas vezes, ultrapassam a noção em vias de aprendizagem, ou seja, a noção de uma derivada de uma função no ponto, o que conduz a necessidade de revisar conhecimentos que se supõe tenham sido estudados na Educação Básica e são considerados disponíveis, o que ficou evidente na pandemia em função do ensino remoto, pois muitos estudantes da Educação Básica se perderam durante os dois anos de estudo nessa modalidade, o que foi detectado pelos professores e pelas Secretarias de Educação dos estados brasileiros .

Desse modo, sabemos que no ensino a distância fica a cargo do estudante identificar suas dificuldades e agir sobre o meio (mesogênese), procurando diferentes materiais que possam auxiliar no seu desenvolvimento, o que os torna responsáveis também pelo tempo didático (cronogênese), que deixa de ser controlado pelo professor. Novamente observamos que o ensino remoto nos mostrou que é preciso atenção em relação a perda de sentido do material de estudo, em particular, criando meios que realmente auxiliem os estudantes a ultrapassarem suas dificuldades.

Essas mudanças precisam ser incorporadas às pesquisas sobre ensino e aprendizagem de Matemática e Ciências quando passamos da modalidade presencial à modalidade remota ou híbrida e a distância, pois além de novas metodologias e estratégias, é preciso criar novos meios de mostrar a importância do trabalho em grupo para os professores e individual para os estudantes, que na modalidade não estão só e isolados

Conclusão

Ressaltamos a partir dos resultados encontrados para o grupo de professores especialistas que as dificuldades de mudança da topogênese e da cronogênese precisam ser consideradas pelo ensino, em particular, para o ensino online, seja ele a distância, remoto ou híbrido, pois os professores realizaram o estudo de diferentes formas utilizando seus conhecimentos prévios, o que mostra a importância de mostrar aos estudantes quais suas responsabilidades em relação à participação ativa no curso e que os mesmos precisam ficar atentos estabelecendo momentos para a realização do estudo, o que foi realizado pelos professores, pois dois professores realizaram o estudo de forma contínua e os outros dividiram seus tempos de forma a tratar as situações uma de cada vez, mantendo um intervalo de tempo associado a sua disponibilidade. Essa organização do tempo de estudo nos parece mais delicada para os estudantes, pois estes podem precisar da ajuda do professor e do tutor, que segundo nosso referencial teórico deveria ser disponibilizado por meio de um grupo de aprendizagem com a participação de professor e tutores para efetuarem a mediação necessária.

Sendo assim, nos parece importante incorporar às pesquisas em Educação Matemática novos constructos teóricos que permitam auxiliar professores e estudantes a compreenderem melhor seus respectivos papéis no jogo didático quando se trata do desenvolvimento de cursos na modalidade remota, a distância e híbrida.

As observações dos professores, que desenvolveram o estudo isoladamente utilizando seus conhecimentos prévios nos indica que é preciso compreender melhor as regularidades e diferenças entre o ensino presencial e o ensino a distância, remoto e híbrido, para que as transações entre os diferentes atores do jogo didático possa ser observada levando-se em conta todos os que dele participam, em destaque para o papel do professor e do estudante, mas no caso do ensino a distância é fundamental a participação do tutor junto aos estudantes e a identificação das tecnologias utilizadas como podemos evidenciar por meio do tetraedro centrado apresentado por Jaillet (2004) em Frayssinhes (2012) que substituiu o triângulo pedagógico.

Da mesma forma Rézeau (1998) ao transformar o triângulo didático em tetraedro didático pedagógico nos permite observar a importância de considerar os polos: grupo de aprendizagem e tecnologias, o que conduz a ressaltar o papel do tutor, que sendo um dos indivíduos que compõe esse grupo, tem importância fundamental para auxiliar os estudantes na revisão dos conhecimentos prévios necessários para a introdução de novos conhecimentos, precisando assim ser especialista na área de estudo e estar em contato constante com o professor para organizar seu trabalho e atender às necessidades dos estudantes, podendo assim compreender suas dúvidas e identificar novos métodos quando diferentes do apresentado pelo professor.

Observamos ainda que a passagem da modalidade presencial à modalidade remota ou a distância não exige apenas a utilização de novas metodologias e estratégias, mas que é preciso criar meios de mostrar a importância do trabalho em grupo para discussão e reflexão entre professores, tutores e estudantes de forma que estes possam compreender melhor a importância do trabalho individual e dos questionamentos do grupo relacionados aos saberes em jogo e as tecnologias utilizadas. Dessa forma ressaltamos que é preciso formar professores e tutores que reconheçam de forma clara seu papel nessa nova perspectiva de aprendizagem na qual o papel do estudante é fundamental para o seu próprio desenvolvimento, mas este necessita de ajuda, mais particularmente do tutor.

O estudo da proposta de aula pelos professores nos auxiliou a compreender melhor as dificuldades dos estudantes em termos de necessidade de validação do trabalho matemático por eles realizados, em particular quando se refere a utilização de métodos de resolução diferentes do apresentado pelo professor, da necessidade de atuação do responsável pelo trabalho do grupo com respostas rápidas e claras em relação ao questionamento dos estudantes, do professor ao preparar suas aulas estar consciente dos conhecimentos prévios esperados dos estudantes e ter meios para auxiliar dificuldades particulares e específicas de falta desses conhecimentos. É preciso ainda que o professor controle seu próprio tempo no desenvolvimento da aula e das tarefas propostas para indicar um desenvolvimento que seja compatível com o do seu grupo de aprendizes.

Enfatizamos aqui que os professores eram especialistas na área, o que lhes permitiu pular a primeira etapa, que consideraram importante para os estudantes propondo que fosse indicada após a apresentação do vídeo.

Em relação as atividades propostas na terceira etapa, os professores consideraram insuficientes, pois a maioria das tarefas exigiam apenas o nível técnico de aplicação da derivada de funções dadas. Além disso, a única tarefa de aplicação era a discutida em aula, em geral, utilizada para motivar o estudo da derivada, mas que não corresponde às necessidades dos diferentes cursos em que a disciplina de Cálculo I é desenvolvida. Os professores de engenharia consideraram a importância das aplicações associadas ao curso e ressaltaram que, em geral, seus estudantes têm dificuldades em compreender o papel da disciplina de Cálculo no curso, o que precisa ser revisitado e motivado quando estes conhecimentos são importantes para outras disciplinas.

Precisamos continuar nossa pesquisa, em particular no que diz respeito a identificar conhecimentos prévios dos estudantes de forma a poder auxiliá-los a se tornarem mais autônomos e melhorar seus respectivos ritmos, o que nos parece uma questão tanto do ensino presencial como do ensino remoto ou a distância, uma vez que nesse último o isolamento do estudante é maior.

A experiência com esse pequeno grupo de professores nos permitiu refletir sobre a importância de grupos de discussão entre professores de uma mesma disciplina para diferentes cursos, pois acreditamos que assim podemos construir propostas de ensino mais adequadas aos diferentes grupos e mostrar a responsabilidade das instituições em organizar

de forma coerente as disciplinas desses cursos, cujo foco deve ser as possíveis aplicações em que a matemática serve de ferramenta para seus desenvolvimentos.

Referências

- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Dias, M.A. (1998). *Problèmes d'articulation entre points de vue "cartésien" et "paramétrique" dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*. [thèse de Doctorat, Université Paris Denis Diderot, França]. Repositório Institucional UP. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01252758>
- Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM*, 6.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang: Suisse.
- Frayssines, J. (2016). La Mathématique : *concept transdisciplinaire de l'apprentissage sur les réseaux numériques*. Recuperado em 12 de outubro de 2022 de <https://efts.univ-tlse2.fr/accueil/les-chercheurs/jean-frayssines>
- Frayssines, J. (2012). La Révolution Numérique : *Les nouveaux paradigmes de l'apprentissage des adultes*. Recuperado em 12 de outubro de 2022 de <https://efts.univ-tlse2.fr/accueil/les-chercheurs/jean-frayssines>
- Godoy, A.S. (1995). Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. Recuperado em 12 de outubro de 2022 de <http://bibliotecadigital.fgv.br/ojs/index.php/rae/article/view/38183/36927>
- Godoy, A.S. (1995a). Pesquisa qualitativa: *Tipos fundamentais*. Recuperado em 12 de outubro de 2022 de <http://bibliotecadigital.fgv.br/ojs/index.php/rae/article/view/38200>
- Jaillet, A. (2004). *L'école à l'ère numérique : des espaces numériques pour l'éducation et l'enseignement à distance*. L'Harmattan: Paris.
- Johsua, S. & Félix, C. (2002). Le travail à la maison, un milieu pour l'étude. *Revue Française de Pédagogie*, 141, pp. 89-97.
- Nicolescu, B. (2012). The International Center for Transdisciplinary Research (CIRET) <http://ciret-transdisciplinarity.org/transdisciplinarity.php>
- Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18(2), 139-190.
- Ravestein, J. (2011). *Étudier à distance : le problème de l'idiorrythmie*. Recuperado em 12 de outubro de 2022 de <http://www.rhuthmos.eu/spip.php?article321>
- Rézeau Joseph. *L'apprenant, l'enseignant et la machine: triangle d'or ou triangle des Bermudes?*. Recuperado em 25 de novembro de 2022 de https://www.persee.fr/docAsPDF/apliu_0248-9430_1998_num_17_3_1160.pdf
- Santini, J. & Sensevy, G. (2011). *Les interactions didactiques dans la dialectique jeux d'apprentissage – jeux épistémiques*. Une étude de cas a l'école primaire. Recuperado em 12 de outubro de 2022 de <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00533804>
- Stewart, J. (2010). *Cálculo*. Cengage Learning: Brasil.
- Yin, R. K. (2005). *Introducing the world of education. A case study reader*. Thousand Oaks: Sage Publications.