CONFLICTOS SEMIÓTICOS EN EL APRENDIZAJE A DISTANCIA DE NÚMEROS COMPLEJOS EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

SEMIOTICS CONFLICTS IN UNIVERSITY STUDENTS AT THE DISTANCE LEARNING OF COMPLEX NUMBERS

Lizzeth Navarro-Ibarra, Omar Cuevas-Salazar, Alan Robles-Aguilar
Instituto Tecnológico de Sonora. (México)
lizzeth.navarro@gmail.com, omar.cuevas@itson.edu.mx, alan.robles@itson.edu.mx

Resumen:
El objetivo es determinar los conflictos semióticos en el aprendizaje de la notación de números complejos en estudiantes universitarios. La enseñanza del tema se realizó en modalidad a distancia. El estudio se fundamenta en la teoría de Duval. El enfoque es cualitativo descriptivo. Se diseñó e implementó un instrumento diagnóstico de manera presencial con seis actividades. Participaron 66 estudiantes. Se encontraron dificultades en las conversiones de la notación binómica a la polar y exponencial. También, la transformación de la notación polar al registro en el plano originó conflictos. Los hallazgos permitirán construir en un futuro una propuesta con el uso de tecnología que apoye a los estudiantes en las representaciones de los números complejos.

Palabras clave: Evaluación diagnóstica, educación superior, números complejos

Abstract:
This paper is aimed at determining the semiotic conflicts present in university students' learning of complex numbers notation. Distance learning was used to teach the subject. The study is based on Duval's theory with a qualitative descriptive approach. An in-person diagnostic instrument with six activities was designed and implemented to a sample of sixty-six students. Difficulties were found in the conversion from binomial to polar and to exponential notations. Additionally, conflicts arose from the transformation of polar notation to their representation on the plane. The findings will allow building a proposal that, with the use of technology, aids students in the representations of complex numbers, in the future.

Keywords: diagnostic evaluation, higher education, complex numbers

Introducción

En la investigación de la matemática educativa surge comúnmente la paradoja cognitiva referente a la incapacidad de gran cantidad de estudiantes para transitar entre registros de representación como mencionan Duval (2006), Hitt (2017) y Dufour (2011). La comprensión del concepto implica la articulación coherente de las diferentes representaciones que entran en juego durante la resolución de problemas (Hitt, 1998). Para D'Amore et al. (2015) el desarrollo cognitivo se integra por las interacciones sociales, es decir, actividades mediadas e interiorizadas por formas culturales. A su vez, el signo lingüístico es un enlace entre las personas y su medio ambiente, además, de conformar un significado, lo que permite que objetos de conocimiento social se trasladen al plano individual.

La dificultad con el pensamiento matemático es, según Duval (2016), la especificidad matemática y lo complejo a nivel cognitivo de realizar una conversión o cambio de representación. Por su parte, Ribeiro et al. (2021) expresan que a través de la coordinación de registros de representación semiótica se produce el aprendizaje de los conceptos matemáticos. En el proceso de conversión de acuerdo con Duval (2016) las dificultades que se presentan se relacionan directamente con la incomprensión conceptual. Esto además limita a los estudiantes a emplear el conocimiento adquirido y es un obstáculo para la construcción de nuevo conocimiento matemático. Consecuentemente se disminuye el avance en la comprensión y aprendizaje de los estudiantes.

En el aprendizaje de los números complejos Randolph y Parraguez (2019) en su estudio encontraron una falta de articulación en las formas de pensamiento, predominando el analítico-aritmético y con ausencia de tránsitos hacia otras representaciones, por ello, concluyen que se presenta una comprensión fragmentada del objeto. También, Carrasco (2017) expone en su trabajo la dificultad de los estudiantes en el tránsito del registro algebraico al geométrico, la cual es una competencia básica para la resolución de problemas y la comprensión del objeto matemático.

En estudio realizado por Antonio (2020), encontró que los estudiantes carecen de la construcción del significado geométrico de los números complejos, además en las operaciones presentan dificultades en la conversión del registro gráfico al algebraico. A su vez, Romero, Quiñonez y Del Castillo (2021) determinaron que los estudiantes confunden los significados de los objetos matemáticos módulo y argumento de números complejos. Por otra parte, los hallazgos de Romero (2013) indican dificultades de los alumnos al representar la parte imaginaria de un número complejo. También, al construir módulos con cantidades negativas y en obtener argumentos omitiendo el cuadrante al que pertenece el número complejo.

Además, el aprendizaje a distancia enfrenta retos como la ausencia de un espacio de interacción exclusivamente educativo y la restricción a lo que puede ser visto y escuchado (Labraña-Vargas et al., 2021). Aunque la interacción en internet tiene pocas reglas, y que en muchas ocasiones no están escritas, la disponibilidad y uso de herramientas fomenta la disciplina de la institución educativa. Esto motivado bajo la premisa de que el estudiante más apegado al comportamiento ideal será el que más aprende (Ayala, 2021).

En contraste, Macías, López, Ramos y Lozada (2020) expone que la enseñanza virtual fomenta la participación activa de los alumnos, el trabajo colaborativo y la comunicación entre los estudiantes. De igual forma, se incrementa la motivación del profesor y del grupo al facilitar una interacción continua que dinamiza la enseñanza. La limitación que enfrenta el trabajo virtual es la deshumanización en la interacción.

Con base en lo anterior, se desarrolla un estudio en la línea de investigación de pensamiento algebraico, planteando como objetivo: determinar los conflictos semióticos en el aprendizaje de la notación de números complejos en estudiantes universitarios.

Marco teórico

El enfoque teórico en que se fundamenta este estudio son los registros de representación semiótica de Duval (1993). Una definición simple de representación explica el concepto como algo que se pone en lugar de otro algo (Duval, 2016). Las representaciones mentales son las concepciones que tiene un individuo sobre un objeto y sobre lo que se relaciona con él. Por otra parte, las representaciones semióticas son las construcciones de expresiones donde se usan signos bajo un sistema de representación. Es decir, las representaciones semióticas son el medio para expresar las representaciones mentales y que sean visibles o entendibles para otros (Duval, 1993).

La representación de un objeto matemático puede ser mediante lenguaje verbal, símbolos, trazos, figuras, entre otros. No obstante, un objeto matemático no debe ser confundido con su representación ya que esto genera incomprensión y la imposibilidad de usar el concepto matemático fuera de la situación en que se aprendió (Duval, 1993). Las representaciones también comprenden signos y sus asociaciones, cumplen reglas y pueden describir fenómenos. Las representaciones, además de transmitir un concepto mental, su manipulación permite crear nuevo conocimiento (Duval, 2016).

Los registros de representación deben cumplir tres actividades fundamentales. La primera, para que un sistema semiótico pueda considerarse un registro de representación debe cumplir con la formación de una representación identificable. La representación debe incluir un conjunto de rasgos y de datos en el contenido. Esta información depende de las unidades y reglas de integración del mismo registro semiótico donde se genera la representación. La segunda actividad se refiere al tratamiento de una representación que consiste en la transformación de esta representación dentro del mismo registro en que se formó, es decir, una transformación interna. La tercera actividad que debe cumplir una representación es la conversión, y es la transformación de la representación en una representación en otro registro, en ocasiones se conserva la totalidad o solo una parte de la información del registro de partida (Duval, 1993).

En el contexto matemático, la conversión y el tratamiento son fundamentales en la resolución de problemas. El tratamiento es básico para poder elegir la mejor notación de acuerdo con el tipo de situación problema a resolver. En cuanto a la conversión, este es un proceso cognitivo más difícil que el tratamiento, y en la mayoría de los estudiantes es el inicio para lograr la comprensión. El cambio de representación de objetos matemáticos de un sistema semiótico a otro es un impulso cognitivo. En contraste, el tratamiento tiene reglas, asociaciones básicas, la conversión no es simplemente una codificación (Duval, 2006).

Metodología

La investigación es de tipo cualitativo descriptivo. El trabajo consistió en diseñar e implementar un instrumento diagnóstico para identificar los conflictos semióticos que se presentan con las notaciones de los números complejos. La población a la que se dirigió fueron estudiantes universitarios de la asignatura Álgebra Lineal, donde la instrucción del tema se impartió en modalidad a distancia a través de la plataforma Zoom, con sesiones síncronas y explicación por parte del docente, esto debido a la situación por la pandemia COVID-19.

La unidad de competencia del programa del curso indica desarrollar el manejo de los números complejos con base en sus propiedades utilizando las distintas notaciones. Los temas comprenden la noción y forma de expresar números complejos en diferentes notaciones (de par ordenado, binómica, polar o trigonométrica de Euler o exponencial), así como la conversión entre notaciones. De igual forma, se señala realizar las operaciones de suma, resta, producto y cociente en forma binómica, y producto y cociente para la forma polar (trigonométrica) y exponencial (Euler). La instrucción de estos temas se impartió durante seis sesiones de una hora.

El instrumento se diseñó para determinar los conflictos semióticos en las transformaciones y conversiones de los números complejos en las diferentes representaciones. En el instrumento no se incluyen las operaciones entre números complejos.

La aplicación del instrumento fue de forma presencial y en formato impreso, al permitir las autoridades de salud y académicas del país, el regreso a las aulas físicas. En el estudio participaron 66 estudiantes, los cuales tuvieron una hora para responder el instrumento. A los participantes se les proporcionó lápiz, borrador, regla, transportador y utilizaron su propia calculadora científica.

Para el análisis de las actividades se establecieron indicadores que deberían cumplir cada una de ellas. Se revisó si se desarrolló cada actividad con todos los elementos, de forma parcial o incorrecta. El instrumento se integró de seis actividades independientes en donde se le solicitó al estudiante escribir los números complejos en sus diferentes representaciones, así como realizar tratamientos y conversiones para obtener las notaciones de números complejos (par ordenado, binómica, polar o trigonométrica de Euler o exponencial). El instrumento se redactó en dos hojas de trabajo, en la primera hoja se incluyó solamente la actividad 1. En esta actividad el alumno debe realizar la notación gráfica de números complejos a partir de la forma binómica.

En la hoja de trabajo 2 se integraron las cinco actividades restantes (actividades 2, 3, 4, 5 y 6). En la actividad 2 se solicita la conversión de la representación gráfica a la notación rectangular o binómica. A su vez, en la actividad 3 se indica obtener la representación polar de un número complejo en notación rectangular.

En la actividad 4, la notación exponencial se debe calcular iniciando con un número complejo en representación binómica. Por otra parte, en la actividad 5, se proporciona un número complejo en notación polar y se pide expresarlo en forma rectangular. En la actividad 6 y última, la conversión solicitada es de la notación polar a la representación gráfica.

La hoja de trabajo uno se proporcionó al estudiante y cuando concluyó, se le retiró el documento y se le entregó la hoja de trabajo dos. Este procedimiento se estableció para evitar que el participante observara las representaciones gráficas de los números complejos que se tienen en la hoja de trabajo dos, ya que en la actividad 1 el alumno debe trazar un plano y ubicar pares ordenados de números complejos.

En la actividad 1 se proporciona al estudiante cuatro números complejos en la forma binómica y se le solicita realizar la notación gráfica. Como apoyo al participante se adjuntó a la actividad papel milimétrico con el objetivo de facilitar el trazado de los ejes y la escala (ver Figura 1).

Figura 1. *Actividad para realizar la conversión de la representación rectangular a la notación gráfica.*

I. Dados los siguientes números complejos en su representación rectangular, dibuja un plano complejo y representa cada uno de ellos en su notación gráfica:

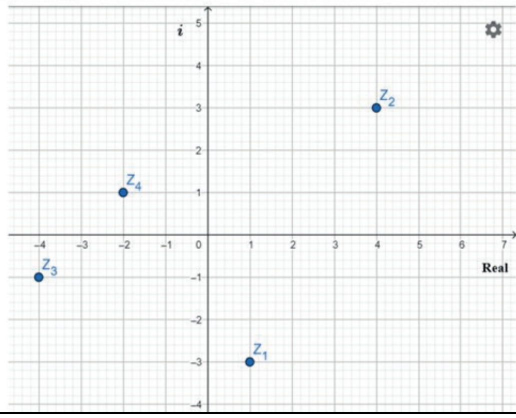
$Z_1 = 3 - 2i$ $\quad$ $Z_2 = -8 - 4i$ $\quad$ $Z_3 = -1 + 6i$ $\quad$ $Z_4 = 9 + 7i$

Fuente: elaboración propia.

En la Figura 2 se presenta la segunda actividad la cual muestra números complejos en su representación gráfica y se indica que se obtenga la notación rectangular. Los números complejos están ubicados en pares ordenados con números enteros para evitar confusión al identificarlos.

Figura 2. *Actividad para realizar la conversión de la representación gráfica a la notación rectangular.*

II.- Dados los siguientes números complejos en su representación gráfica, escríbelos en su notación rectangular ($z = a \pm bi$).



$Z_1 =$ ______________ $Z_2 =$ ______________

$Z_3 =$ ______________ $Z_4 =$ ______________

Fuente: elaboración propia.

En la actividad tres se indica convertir un número complejo de la forma rectangular a la notación polar, utilizando el ángulo en grados. De igual forma, en la actividad cuatro se solicita realizar la conversión de un número complejo de la forma rectangular, pero en este caso sería a la notación exponencial con su correspondiente ángulo en π radianes.

Por otro lado, en la actividad cinco, se proporciona un número complejo en la forma polar con el ángulo en grados y se pide convertir a la notación rectangular (ver Figura 3).

Figura 3. *Actividades para realizar las conversiones entre notación rectangular, polar y exponencial.*

III.- El número complejo $Z = -3 - 7i$ (representado en forma rectangular), escríbelo en notación polar con el ángulo en grados, en el intervalo de $0° \leq \theta \leq 360°$

IV.- Dado el número complejo en forma rectangular $Z = 2 - 5i$, realiza su representación en forma exponencial con el ángulo en π radianes, en el intervalo de $0 \leq \theta \leq 2\pi$

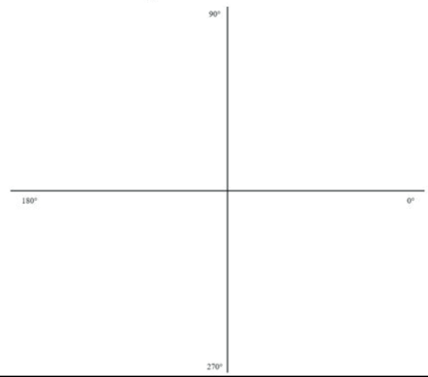
V.- El número complejo representado en forma polar $Z = 8\,Cis\,137°$, exprésalo en la notación rectangular.

Fuente: elaboración propia.

Por último, en la actividad seis se tienen dos números complejos en la forma polar con el ángulo en grados y se señala realizar la notación gráfica. Como apoyo, se proporciona un plano indicando la escala en grados (ver Figura 4).

Figura 4. *Actividad para realizar la conversión de la representación polar a la notación gráfica.*

VI.- Realiza la representación gráfica de los siguientes números complejos expresados en notación polar. $Z_1 = 5\ Cis\ 40°$ $Z_2 = 2 < 195°$



Fuente: elaboración propia.

Resultados

Participaron en el estudio alumnos de Ingeniería de la asignatura Álgebra Lineal donde el 65% tenían entre 18 y 19 años, el resto de los estudiantes en el rango de 20 a 25 años. En cuanto al género, la mayoría eran varones y el 40 % mujeres.

Las actividades se revisaron indicando si la notación fue construida con todos los elementos, de forma parcial o incorrecta, y de acuerdo con los indicadores.

En la primera actividad se tienen cuatro indicadores para evaluar la conversión de un número complejo de la forma rectangular al par ordenado en el plano complejo. En la Tabla 1 se exponen los porcentajes obtenidos en cada indicador, donde se observa que el 80% logró la conversión del número complejo de la forma binómica al par ordenado en el plano complejo. La conversión parcial fue realizada por el 12% de los estudiantes, mientras que el 8% lo hizo de forma incorrecta.

Tabla 1. *Resultados actividad 1.*

Dados los siguientes números complejos en su representación rectangular ($Z_1 = 3 – 2i$, $Z_2 = – 8 – 4i$, $Z_3 = – 1 + 6i$, $Z_4 = 9 + 7i$), dibuja un plano complejo y representa cada uno de ellos en su notación gráfica.

Indicadores	Completo %	Parcial %	Incorrecto %
Traza los ejes del plano complejo	97		3
Identifica los ejes del plano	9.1	6.1	84.8
Asigna escala al plano complejo	31.8	54.5	13.6
Ubica los números complejos en el plano	80.3	12.1	7.6

Fuente: elaboración propia.

En la actividad 2, el estudiante debía hacer la conversión del número complejo de la representación gráfica a la notación rectangular. Para esta actividad se establecieron tres indicadores (ver Tabla 2), con el objetivo de verificar la construcción de la notación rectangular. La conversión a la representación rectangular fue realizada por el 91% de los participantes.

Tabla 2. *Resultados actividad 2.*

Dados los siguientes números complejos en su representación gráfica, escríbelos en su notación rectangular ($z = a \pm bi$).

Indicadores	Completo %	Parcial %	Incorrecto %
Identifica el componente real de número complejo	97	3	
Identifica el componente imaginario de número complejo	92.4	6.1	1.5
Representa en forma rectangular los números complejos	90.9	7.6	1.5

Fuente: elaboración propia.

La conversión de la forma rectangular a la notación polar con el ángulo en grados y en el intervalo de 0° a 360° se evalúo en la actividad 3. El desarrollo de la actividad se verificó con cuatro indicadores que se describen en la Tabla 3. Los resultados de esta actividad se concentran en la Tabla 3, donde se observa que solamente el 29% de los estudiantes logró construir la representación polar del número complejo. Además, el 15% de los participantes obtuvo una construcción parcial de la notación y, el mayor porcentaje (56%) lo hizo de forma incorrecta.

Tabla 3. *Resultados actividad 3.*

El número complejo $Z = -3 - 7i$ (representado en forma rectangular), escríbelo en notación polar con el ángulo en grados, en el intervalo de $0° \leq \theta \leq 360°$.

Indicadores	Completo %	Parcial %	Incorrecto %
Obtiene el valor del módulo (r)	53		47
Calcula la amplitud (ángulo)	50		50
Cumple con el ángulo de 0° a 360°	30.3		69.7
Escribe el número complejo en notación polar	28.8	15.2	56.1

Fuente: elaboración propia.

La actividad 4 solicita convertir un número complejo de la forma rectangular a la notación exponencial. Esta actividad se evaluó con cuatro indicadores como se expone en la Tabla 4. En los resultados se observa que el 27%

de los estudiantes realizó la notación exponencial con el ángulo en π radianes en el intervalo de 0 a 2π. Sin embargo, el 68% presentó una notación exponencial incorrecta.

Tabla 4. *Resultados actividad 4.*

Dado el número complejo en forma rectangular Z = 2 – 5i, realiza su representación en forma exponencial con el ángulo en π radianes, en el intervalo de $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Indicadores	Completo %	Parcial %	Incorrecto %
Obtiene el valor del módulo (r)	54.5		45.5
Calcula la amplitud (ángulo) en π radianes	31.8	1.5	66.7
Cumple con el ángulo de 0 a 2 π	31.8		68.2
Escribe el número complejo en notación exponencial	27.3	4.5	68.2

Fuente: elaboración propia.

En la Tabla 5 se presentan los resultados de la revisión de la actividad 5. En esta actividad se indicó realizar la conversión del registro polar a la notación rectangular. La evaluación de la actividad se hizo con los tres indicadores que se describen en la Tabla 5. Los resultados señalan que 35% de los alumnos lograron la notación rectangular mientras que en 64% de los participantes la representación rectangular fue incorrecta.

Tabla 5. *Resultados actividad 5.*

El número complejo representado en forma polar Z = 8 Cis 137°, exprésalo en la notación rectangular.

Indicadores	Completo %	Parcial %	Incorrecto %
Obtiene el componente real del número complejo (a)	36.4	1.5	62.1
Obtiene el componente imaginario del número complejo (b)	37.9	62.1	
Escribe el número complejo en notación rectangular	34.8	1.5	63.6

Fuente: elaboración propia.

La última actividad corresponde a la conversión de números complejos en la forma polar a la representación gráfica. La verificación de la actividad se llevó a cabo con cinco indicadores que se presentan en la Tabla 6, al igual que los resultados. La notación gráfica la obtuvieron 29% de los participantes, aunque hubo estudiantes que utilizaron regla y transportador y otros que decidieron convertir a la forma binómica para construir la notación como par ordenado.

Además, el 23% presentó una representación con errores y 48% mostraron una notación incorrecta.

Tabla 6. *Resultados actividad 6.*

Realiza la representación gráfica de los siguientes números complejos expresados en notación polar ($Z_1 = 5$ Cis $40°$, $Z_2 = 2 \angle 195°$).

Indicadores	Completo %	Parcial %	Incorrecto %
Define escala en el plano complejo	18.2	33.3	48.5
Traza el módulo midiendo con regla	10.6	15.2	74.2
Ubica el ángulo midiendo con el transportador	34.8	10.6	54.5
Convierte a forma binómica para localizar el número complejo	28.8		71.2
Representa los números complejos en el plano	28.8	22.7	48.5

Fuente: elaboración propia.

Conclusiones

La investigación que se realizó es del tipo cualitativo descriptivo con el objetivo de identificar los conflictos semióticos en los estudiantes universitarios al transitar entre los registros de representación de los números complejos. Para la revisión de las actividades se establecieron indicadores específicos para cada una de ellas, señalando el nivel de logro como completo, parcial o incorrecto.

En el análisis de las actividades se encontró que el 80% de los estudiantes lograron transitar entre los registros rectangular a gráfico, así como del par ordenado la notación rectangular. Sin embargo, una quinta parte de los participantes tuvo dificultades en la representación gráfica de los números complejos indicados en la actividad.

Por otra parte, la conversión del número complejo a la notación polar o a la representación exponencial fue realizada de forma correcta en menos del 30% de los estudiantes. En estas conversiones, la mitad de los participantes obtuvo el módulo con el procedimiento adecuado. En contraste, la amplitud en la conversión a la notación polar, aunque la logró uno de cada dos estudiantes, solamente un tercio presentó el ángulo en el intervalo solicitado.

A su vez, en la conversión a la notación exponencial, el 60% de los estudiantes erró en el cálculo de la amplitud y en expresar el ángulo en el intervalo señalado. En ambas representaciones, polar y exponencial, el argumento fue el principal problema. Estas dificultades coinciden con lo encontrado por Romero (2013) donde los estudiantes calculaban el argumento sin considerar el cuadrante al que pertenece el número complejo.

En cuanto a la conversión del número complejo de la forma polar a la notación rectangular, el 65% de los participantes construyó una representación que no corresponde a la rectangular. Evidenciando una complejidad similar a la conversión del registro rectangular a la notación polar y a la representación exponencial.

En la actividad donde se solicitó realizar la conversión de la notación polar al registro en el plano complejo se determinó que originó conflictos tanto con el módulo como con la amplitud en la mayoría de los estudiantes. Estos resultados son similares a los detectados por Carrasco (2017) y Antonio (2020), quienes identificaron conflictos en la conversión del registro algebraico al geométrico y del significado geométrico de los números complejos.

Estos hallazgos permiten definir la aportación de esta investigación. Se concluye que las conversiones entre la notación rectangular y la representación gráfica son las que pueden construir de forma correcta la mayoría de los estudiantes. Por el contrario, las conversiones que involucren a las notaciones polar y exponencial ocasionan conflictos que impiden lograr la representación del número complejo principalmente por la ubicación del argumento (ángulo) en el cuadrante indicado.

Por otra parte, la enseñanza a distancia es un factor que pudo influir en la comprensión de los números complejos porque al estar estudiando desde casa los alumnos están rodeados de situaciones que los pueden distraer como señala Labraña-Vargas et al. (2021). Sin embargo, este aspecto es algo que se debe investigar a fondo.

Las deficiencias encontradas en las conversiones de los números complejos serán fundamentales para conformar una futura propuesta didáctica. Además, se incorporará el uso de la tecnología, el cual ha sido limitado en la enseñanza de los números complejos según Antonio (2020). Esto con el fin de apoyar a los estudiantes en la construcción de las representaciones semióticas de los números complejos.

Agradecimientos: Se agradece al Programa de Fomento y Apoyo a Proyectos de Investigación (PROFAPI, 2022) por su aportación fundamental para este estudio.

Referencias bibliográficas

Antonio, J. A. (2020). *Aprendizaje del concepto de números complejos desde la teoría de las situaciones didácticas y el software geogebra* [Tesis de Magister en Educación Matemática, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia]. https://repositorio.uptc.edu.co/bitstream/001/3719/1/Aprendizaje_del_concepto_numeros_complejos.pdf

Ayala, R. (2021). Un zoom a la educación virtual: biopolítica y aprendizaje centrado en el estudiante. *Educación Médica, 22*(3), 177-180. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1575181321000061

Carrasco, M. (2017). *Propuesta didáctica para la enseñanza de la multiplicación de números complejos a partir del tránsito entre el registro algebraico y geométrico* [Tesis de Magister en Didáctica de la Matemática, Pontificia Universidad Católica del Valparaíso]. http://opac.pucv.cl/pucv_txt/txt-2500/UCC2598_01.pdf

D'Amore, B., Fandiño, M., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "Paradoja cognitiva de Duval". *Revista Latinoamericana de Investigación Matemática Educativa, 18*(2), 177-212.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9*(1), 143-168.

Duval, R. (2016). Capítulo Segundo. Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En R. Duval & A. Sáenz-Ludlow (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 61-94). Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Dufour, S. (2011). *L'utilisation des représentations par deux enseignants du collégial pour l'introduction de la dérivée* [Mémoire de maîtrise. Université du Québec à Montréal]. http://www.archipel.uqam.ca/4059/

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 123-134. http://dx.doi.org/10.1016/S0732-3123(99)80064-9

Hitt, F. (2017). El aprendizaje del cálculo y nuevas tendencias en su enseñanza en el aula de matemáticas. *Eco Matemático, 8*, 6-15. https://doi.org/10.22463/17948231.1374

Labraña-Vargas, J. R., Urquieta-Álvarez, M. A., & Salinas-Fuentealba, S. A. (2021). Espacio y educación: desafíos de la enseñanza a distancia en el contexto de la pandemia por COVID 19. *Simbiótica. Revista Electrónica, 8*(3), 119- 134.

Macías, J., López, J., Ramos, G., & Lozada, F. (2020). Los entornos virtuales como nuevos escenarios de aprendizaje: el manejo de plataformas online en el contexto académico. *Rehuso, 5*(3), 62-69.

Randolph, V., & Parraguez, M. (2019). Comprensión del Sistema de los Números Complejos: Un Estudio de Caso a Nivel Escolar y Universitario. *Formación Universitaria, 12*(6), 57-82. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062019000600057

Ribeiro, O. A., Medeiros, B., & Gaspar, R. (2021). Teoría de Duval Raymond en la enseñanza de funciones matemáticas. *Research Society and Development, 10*(3), 1-6.

Romero, D. (2013). *Números Complejos: Actividades didácticas con representaciones dinámicas* [Tesis de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemáticas Educativa, Universidad de Sonora]. http://www.repositorioinstitucional.uson.mx/bitstream/20.500.12984/6890/1/romeroroblesdanielam.pdf

Romero, D., Quiñonez, M., & Del Castillo, A. (2021). Intervención didáctica para el aprendizaje de números complejos en modalidad virtual. *SahuarUS, 5*(1), 112-126.