Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
ISSN: 2448-6469

ALME, Vol. 37 No. 1 P.p. 1-10. Periodo: Enero-junio 2024.
Recibido: julio 2023 Aprobado: febrero 2024. Publicado: junio 2024

ACTIVIDADES PARA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE IDENTIDADES ALGEBRAICAS Y FACTORIZACIÓN DESDE UNA PERSPECTIVA GEOMÉTRICA

ACTIVITIES FOR TEACHING-LEARNING OF ALGEBRAIC IDENTITIES AND FACTORIZATION FROM A GEOMETRIC PERSPECTIVE

Lea Mondragón García, Marcela Ferrari Escolá, Edgardo Locia Espinoza
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
07052591@uagro.mx, 13205@uagro.mx, edgardo.locia@gmail.com

Resumen:
Nuestra investigación está sustentada bajo la teoría de Situaciones Didácticas, teniendo como interés el estudio en el proceso de enseñanza-aprendizaje de algunas identidades algebraicas correspondientes a productos notables y factorización, como son: factor común, diferencia de cuadrados y trinomio cuadrado perfecto. Integramos en las actividades propuestas el uso de material manipulable y el software dinámico de GeoGebra. La experimentación se llevó a cabo con un grupo de estudiantes de segundo semestre de educación media superior (EMS). El diseño de las actividades que proponemos propicia que el estudiante interactúe con figuras geométricas manipulables para explorar y justificar las identidades algebraicas planteadas. Al momento de presentar este reporte nos encontramos en el análisis de los datos de la experimentación.

Palabras clave: factorización, productos notables, situación didáctica

Abstract:
Our research is based on the theory of Didactic Situations, having as interest the study in the teaching-learning process of some algebraic identities corresponding to notable products and factorization, such as: common factor, difference of squares and perfect square trinomial. We integrate in the proposed activities the use of manipulable material and the dynamic software of GeoGebra. The experimentation was carried out with a group of students in the second semester of upper secondary education. The design of the activities that we propose encourages the student to interact with manipulable geometric figures to explore and justify the algebraic identities raised. At the time of presenting this report we are in the analysis of the experimental data.

Keywords: factoring, remarkable products, didactic situations

Introducción

En nuestra experiencia docente observamos que existe cierta recurrencia en los errores que cometen los estudiantes de bachillerato cuando trabajan con algunos contenidos algebraicos. Tal es el caso, por ejemplo, de un binomio elevado al cuadrado. Con frecuencia presentan resultados tales como $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - b^2$ o $(a + b)^2 = a^2 + ab$, donde se evidencia el mal uso de las reglas para calcular los productos básicos. Incluso algunos estudiantes, no toman en cuenta el signo entre los dos términos del binomio, ya que no le dan un significado matemático. En la literatura hemos encontrado que, muchos de esos errores han sido reportados como "errores comunes" (Callou y Pereira 2021) y de acuerdo con las investigaciones revisadas (Socas, 2007; Graciano y Aké, 2017; 2019), muchos de ellos se deben a la falta de comprensión y de significados que construyen los estudiantes mientras trabajan con dichos contenidos algebraicos.

El álgebra es un área considerada de difícil entendimiento para los estudiantes, ya que se forman una concepción equivocada de los procesos e incurren en errores repetidamente, (Graciano y Aké, 2017; 2019: 2021). En este trabajo, particularmente nos cuestionamos sobre: ¿Cómo favorece la implementación de una secuencia, fundamentada en la Teoría de Situaciones Didácticas, para la enseñanza-aprendizaje de productos notables y el proceso de factorización, desde una perspectiva geométrica?, ya que consideramos importante que los estudiantes comprendan y signifiquen los procesos mediante las actividades que el profesor plantee.

Tenemos como interés principal diseñar y poner en escena una situación didáctica para la enseñanza de la factorización de expresiones algebraicas, desde la relación entre álgebra y geometría, apoyándonos de la construcción de rectángulos y desafiando a los estudiantes a lograr una expresión algebraica, a partir del cálculo de sus áreas.

Teoría de Situaciones

Sustentamos nuestra investigación en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) ya que plantea una postura constructivista-piagetiana, permitiendo y contribuyendo a la construcción del conocimiento en situaciones de aula. Godino, *et al* (2020), consideran que la hipótesis básica de la TSD es el conocimiento construido en la interacción alumno-saber-profesor, donde el profesor debe tener la capacidad de incitar a los estudiantes a aceptar el desafío de aprender matemáticas, con una selección adecuada de actividades. El interés principal de esta teoría es determinar cómo los individuos construyen y comunican los saberes matemáticos en la resolución de problemas.

Brousseau (2007), plantea que, una situación es aquella interacción entre un sujeto y el medio, a fin de alcanzar el saber enseñado. Considera que: "Una *situación didáctica* es un conjunto de relaciones explícitas o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de estudiantes, algún entorno y el profesor con el fin de permitir a los alumnos aprender algún conocimiento" (Godino, *et al*, 2020, p.149).

Entonces, consideraremos como situación didáctica a toda la actividad desarrollada por parte de los estudiantes y del profesor en combinación con el saber. En este sentido, es importante provocar en el estudiante responsabilidad de involucrarse y buscar una solución al problema que se le plantee al desarrollar las actividades diseñadas por el profesor.

Brousseau propone identificar, en una situación didáctica, aquellas situaciones donde el estudiante interactúa con el medio construyendo conocimiento matemático sin la intervención explícita del profesor (Godino, *et al*, 2020, p.150). Es decir, proponer las *situaciones adidácticas*, donde el estudiante se enfrenta a una situación-problema aplicando los conocimientos con los que cuenta, quizás cambiando e incluso adquiriendo nuevos conocimientos, mediante los resultados de la interacción que realiza en la búsqueda de solución al problema (Godino, et al, 2020). En este sentido, es necesario reflexionar sobre el *medio* didáctico que provoque la interacción entre los estudiantes y las tareas específicas, donde el papel del profesor es relevante en su diseño cuidando que, el estudiante construya sus conocimientos al realizar las actividades planteadas, manipulando o transformando el medio.

La Teoría de Situaciones didácticas, propone situaciones para la construcción del conocimiento matemático a fin de observar cómo aprende el estudiante, cuál es su comportamiento y su evolución al adquirir el conocimiento, clasificándose como situaciones adidácticas, base para estructurar nuestro diseño, a:

Situación de Acción

“En las que se genera una interacción entre los estudiantes y el medio físico. Los alumnos deben tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema planteado”, (Cantoral, *et al*, 2005, p.43). Esta situación es disparadora de la devolución al estudiante de la necesidad de aprender, de resolver un problema. Como situación de acción, consideramos en nuestro trabajo, una actividad donde el estudiante manipule cuadriláteros recortados en papel para armar un rectángulo involucrando el trabajo con fórmulas para el cálculo de áreas conocidas y discutir sobre cómo articular las “partes” conocidas y el “todo” a descubrir.

Situación de Formulación

El objetivo principal es la comunicación y la información que cada estudiante aporte. “Para esto deben modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que se deben comunicar”, (Cantoral, *et al*, 2005, p.43). El estudiante debe interesarse en la búsqueda de una solución, haciendo uso de un lenguaje entendible para comunicar a sus compañeros, con responsabilidad, sus propias conclusiones presentándoles una propuesta de solución, haciendo uso de sus conocimientos. En esta fase, consideramos importante que los estudiantes organizados en equipos de trabajo, donde compartan sus ideas, en plenaria, mediante la observación de diferencias y similitudes en los resultados propuestos, identifiquen las equivalencias dadas en dichos resultados.

Situación de Validación

Se trata de que el estudiante pueda convencer a sus compañeros de la validez de las afirmaciones que hace; en esta situación, cada uno de los estudiantes deben probar y demostrar sus afirmaciones a sus compañeros, no siendo suficiente con la comprobación de un ejemplo para afirmar como verdadera su conjetura; siendo necesario argumentar el porqué de su propuesta. En esta fase, el estudiante corrobora o prueba lo que ha propuesto para la resolución de la actividad planteada, con el fin de verificar si la propuesta en la situación anterior es verídica, realizando comparaciones con el trabajo de sus compañeros, para crear una sola propuesta de resolución.

Situación de Institucionalización

En esta situación se ve claramente la intervención del docente, con las estrategias que pueda utilizar, haciendo responsable al estudiante sobre su propuesta de resolución, considerando las aportaciones de cada estudiante y valorando el trabajo realizado en los tres procesos anteriores, para acercarlos a un lenguaje matemático más formal y a la mejor estrategia de resolución.

El docente no debe dar al estudiante el resultado al que debe llegar, sino que lo debe dejar experimentar con las actividades que deben estar organizadas para que el estudiante pueda transitar entre la acción, formulación y validación, (Cantoral *et al*. 2005).

En cada una de las situaciones existe implícitamente una situación adidáctica, en la que el estudiante se responsabiliza del desarrollo de la actividad, considerando esta labor como parte esencial para la construcción y adquisición de un conocimiento nuevo.

Metodología

Se considera la Ingeniería didáctica como la metodología indicada para esta investigación. Según Calderón y León (2005), se puede implementar en la enseñanza ya que se considera como característica fundamental la comparación del análisis *a priori* de acuerdo a lo planeado en las actividades y el análisis *a posteriori* con los datos obtenidos de las actividades realizadas por los estudiantes, obteniendo así un proceso que permite al estudiante construir su propio conocimiento. Esta metodología consta de cuatro fases: análisis preliminar, análisis *a priori*, puesta en escena y análisis *a posteriori* (Artigue, 1995), fases que permiten validar el diseño.

Análisis preliminar

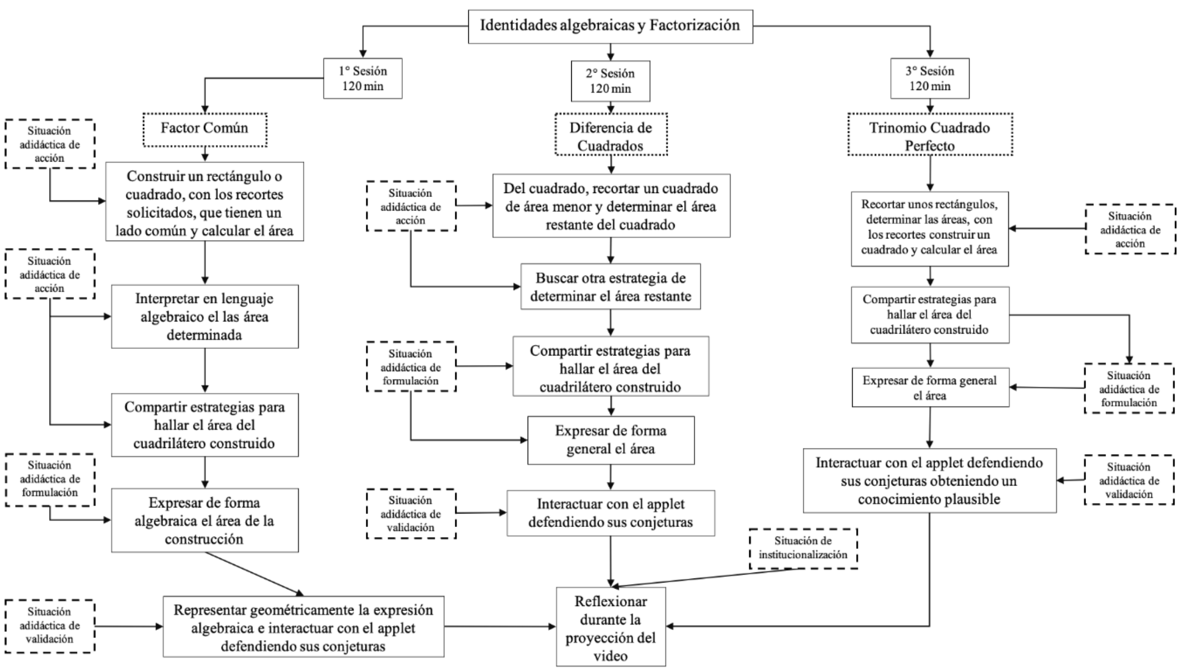
Este análisis se ha desarrollado desde los reportes de investigación que nos permiten conocer la problemática abordada atendiendo las dimensiones cognitiva, epistemológica y didáctica involucradas, mismas que se fortalecerán con el análisis *a posteriori* del primer ciclo de nuestra investigación, elementos que presentamos en este artículo.

Análisis a priori

En esta fase se diseña la secuencia didáctica de actividades, la dosificación de los tiempos, el rol que tendrá el docente frente al grupo de estudiantes, así como realizar una hipótesis sobre la producción de los estudiantes; basándonos en el análisis preliminar. El análisis *a priori*, se convierte en un análisis de control de significados y "comprende una parte *descriptiva* y una *predictiva*, centradas en las características de la situación diseñada y que se pretende presentar en la clase a los estudiantes" (Artigue, 1995, p. 45).

Se ha diseñado una secuencia de actividades en las que se plantean el desarrollo del proceso de factorización considerando tres casos: Factor común, Diferencia de Cuadrados y Trinomio Cuadrado Perfecto, tal como se muestra en el Esquema 1.

Figura 1. *Secuencia de actividades para Factorización.*



Fuente: producción propia.

Diseño de actividades para el caso de factor común

El conocimiento matemático que nos interesa estudiar es identidades algebraicas y factorización, trabajando desde una perspectiva geométrica. En la Tabla 1 presentamos una síntesis de las actividades matemáticas diseñadas, así como elementos predictivos y descriptivos que evidencian nuestras ideas.

Tabla 1. *Síntesis de diseño.*

Situación didáctica de	Actividad	Intención	Argumento esperado
Acción	• Construir el rectángulo y calcular el área con los recortes	• Identificar los lados del rectángulo • Calcular su área aritméticamente	• Hacer uso de la fórmula o sumar las áreas independientes • Identificar que la medida en común de las figuras es la altura
Formulación	• Representar de forma algebraica el área y compara su trabajo con el de sus compañeros	• Transitar del trabajo aritmético al lenguaje algebraico	• Sumar áreas de los recortes o multiplicar lados de la figura construida
Validación	• Dibujar un cuadrilátero dada una expresión algebraica	• Transitar del lenguaje algebraico al geométrico	• Proponer que puede ser un cuadrado o un rectángulo de tal forma que represente el área
Institucionalización	• Analizar lo que varía y lo que es común en los applets • Reflexionar mediante la proyección de un vídeo	• Abstraer lo común en las figuras y la expresión general del área formada • Conocer el caso de factorización que se esté trabajando	• Se puede determinar de sumando independiente y aplicando la fórmula conocida • Considerando las aportaciones de cada estudiante y valorando el trabajo realizado en las tres situaciones anteriores, para acercarlos a un lenguaje matemático más formal y a la mejor estrategia de resolución

Fuente: producción propia.

Experimentación

El desarrollo de las actividades se llevó a cabo con estudiantes de EMS, de la Unidad Académica Preparatoria Popular Incorporada Colotlipa de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro). Se encuentra en la localidad de Colotlipa, Municipio de Quechultenango, Guerrero, México. Los participantes se encuentran cursando el segundo semestre de este nivel educativo, con edades de entre 15 y 17 años. El grupo estuvo conformado por ocho estudiantes, cuatro hombres y cuatro mujeres.

La aplicación de las actividades planeadas se llevó a cabo los días 27, 28 y 29 de junio de 2022, en un horario de 15 hrs a 18 hrs aproximadamente, seis estudiantes son de la localidad de Colotlipa, y dos de la cabecera municipal, Quechultenango, en el estado de Guerrero. Los estudiantes que asistieron fueron por invitación al taller y su asistencia fue de manera voluntaria, como una actividad extracurricular.

La experimentación se desarrolló en tres situaciones didácticas; previo a la primera sesión se proporcionó el cuestionario de diagnóstico-conocimientos previos, a fin de partir de los saberes previos de los estudiantes.

En la fase de la implementación de la situación acción se organizó a los estudiantes en dos equipos. Se pretendía que los estudiantes realizaran los recortes y con estos construyeran un rectángulo y determinaran el área, para lograr con ello que identificaran las formas de representación del área, se observó que la mayoría de los estudiantes lograron representar de una misma manera el rectángulo. Incluso en su mayoría los estudiantes de cada equipo aportaron sus respuestas de la hoja de trabajo, en la que se solicitaba la representación del área del rectángulo construido, así como una descripción verbal y algebraica generalizada para dicha área.

En la fase de la situación formulación, en un trabajo en equipo, compartieron sus ideas y propuestas en las que dieron respuesta a las preguntas de la hoja de trabajo 1, donde la actividad principal era compartir su trabajo, para resaltar la similitud y las diferencias de los trabajos, así como la justificación de cada una de sus respuestas planteadas. Se observó cómo se escuchaban entre sí e intercambiaban opiniones mostrando al resto del grupo lo que lograron, concluyendo en una expresión algebraica similar.

Como parte de la validación, los estudiantes indicaban que sin importar las medidas de sus recortes se cumplían las expresiones planteadas y la interacción con el applet les permitió corroborar las conjeturas a las que llegaron en un número mayor de construcciones, haciendo plausible el conocimiento adquirido.

En la institucionalización se mostraron muy familiarizados con lo propuesto en el video y participaban muy activos, ya que identificaron las analogías con lo que habían realizado anteriormente.

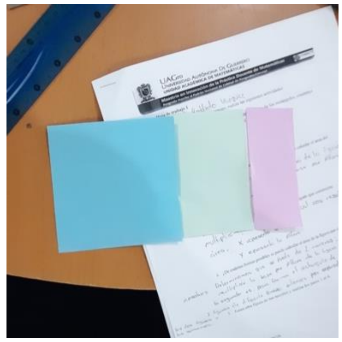
Resultados

La primera actividad consiste en una situación que conduce a la construcción de la identidad algebraica

$$x(a+b) = xa + xb.$$

Se pidió a los estudiantes que presentaran dos o más recortes de hojas de colores de forma rectangular donde la longitud de uno de los lados de cada rectángulo coincidiera. Con los recortes se les pide que formen rectángulos con dos o más piezas, como se muestra en la Figura 1. Luego, se pide que calculen el área del rectángulo formado. En un equipo solo escribieron la fórmula para calcular el área en términos de la base y la altura (marcando lo que es la base y lo que es la altura), mientras que en el otro equipo realizaron el cálculo numérico usando las medidas de sus recortes.

Figura 2. *Ejemplo de la construcción con tres piezas rectangulares con un lado común.*



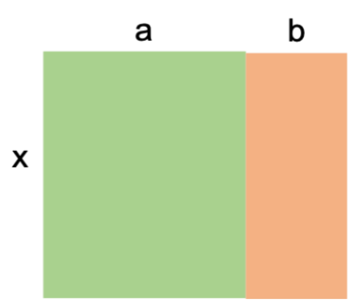
Fuente: producción de los estudiantes (2022)

Posteriormente, se pide a los estudiantes que reflexionen en las formas diferentes para calcular el área del rectángulo construido, provocando a que los estudiantes observen que también pueden calcular las áreas de los rectángulos pequeños y sumarlas para obtener el área total. Se pidió que repitieran los pasos anteriores con diferentes números de recortes. En la conclusión de esta actividad los estudiantes notaron que si usaban la fórmula de $A = bh$, aplicada al rectángulo construido se lograba de igual manera si se calculaba sumando las áreas de las figuras con las que construyeron el rectángulo.

El trabajo realizado por los dos equipos fue mediante la utilización de literales para representar las longitudes de los lados de los rectángulos, aunque inicialmente no lograban identificar que esas literales podrían tomar otros valores cumpliéndose para todas las medidas posibles.

En la situación de formulación, al compartir sus propuestas de solución para el cálculo del área, lograron representar el área por x, lo que identificaron como la altura y $a + b$, como la base (para la primera construcción) y que otra forma de calcular es calcular el área por separado y sumar el área de las figuras que es xa y xb, de manera que el área del rectángulo mayor es $x(a + b)$ y también es $xa + xb$ (figura 2).

Figura 2. *Construcción de un rectángulo con dos recortes.*



Fuente: producción propia.

En la institucionalización se mencionó que esta es una identidad importante, cuando identificamos un factor común la cual válida para cualesquiera valores de x, a y b. Después se abordó el caso de factor común por agrupación.

Conclusiones

De acuerdo a los resultados obtenidos, en la implementación del diseño, hemos encontrado que los estudiantes mostraron dificultades al identificar cada uno de los lados de sus figuras (cuadrado y rectángulos o el rectángulo construido), de forma algebraica, en general no establecieron la relación directa con la medida en común de los lados de sus figuras y la variable asignada a dichos lados. Durante las actividades los estudiantes evidenciaron la dificultad en el tránsito del lenguaje aritmético al lenguaje algebraico, o al lenguaje geométrico, tal y como lo reporta Ardila (2008), con esto evidenciamos la importancia de la propuesta de nuestro diseño en los resultados favorables que hemos encontrado.

Al realizar la prueba diagnóstica, nos permitió evidenciar que los estudiantes no contaban con el conocimiento del proceso de productos notables y factorización.

El uso del material didáctico permite al profesor mejorar la enseñanza de la matemática en contextos escolares tradicionales y a los estudiantes comprender el aprendizaje en la relación del álgebra y la geometría. Mediante la situación de acción y formulación permitió a los estudiantes aplicar sus conocimientos previos y compartir con sus compañeros visualizando en ellos un nivel importante de adaptación al trabajo en equipo, incluso de aquellos estudiantes que en las clases normales no habían mostrado interés en participar.

Es importante precisar que consideramos que nuestra propuesta es innovadora y retadora para la enseñanza-aprendizaje de la factorización de expresiones algebraicas, dando la oportunidad al profesor de abordar este contenido, dando oportunidad de identificar alguna mejora.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gómez (Eds.) *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (2007*). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. BsAs Argentina: Libros de Zorzal.

Calderón, D. I., León, C. O. L. (2005*)*. La ingeniería didáctica como metodología de investigación del discurso en el aula. Investigar en didáctica como un imperativo para el profesor. Universidad del Valle.

Callou, T. G. C. & Pereira, L. B. D. (2021). Error Analysis in the Resolutions of 1st Year High School Students un the Study of Notable Products and Polynomial Factoring. *International Journal of Advanced Engineering Research and Science, 8* (6), 101-111. DOI: 10.22161/ijaers.86.11

Cantoral, R., Farfán, R. Cordero, F. Alanís, J.A., Rodríguez, R. A., Garza, A. (2005). Teoría de Situaciones didácticas. En R. Cantoral, R. Farfán, F. Cordero, J. Alanís, R. Rodríguez y A. Garza (Eds). *Desarrollo del pensamiento matemático* (pp. 41-52). Trillas. ISBN: 968-24-7203-2.

Godino, J. D., Burgos, M. & Wilhelmi, M. R. (2020). Papel de las situaciones adidácticas en el aprendizaje matemático. Una mirada crítica desde el enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, *38*(1), 147-164. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.

Graciano J. & Aké L. P. (2017). Conocimiento común y especializado de productos notables de los futuros profesores de matemáticas. En Serna, Luis Arturo (Ed.), *Acta latinoamericana de matemática educativa* (pp.1320-1329). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de http:// funes.uniandes.edu.co/12359/1/Graciano2017Conocimiento.pdf.

Graciano J. & Aké L. P. (2019). Conocimiento matemático para la enseñanza de productos notables: un estudio de tres casos. *Revista Electrónica Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, *4*(2) Número especial, 192-201. Retrieved from http://funes.uniandes.edu.co/15893/1/Graciano2019Conocimiento.pdf.

Graciano J. & Aké L. P. (2021). Conocimiento de profesores de matemáticas en formación sobre los productos notables. *Uniciencias 35(1), 99-107.* http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-1.6.

Socas, M. M., (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores, M. Bolea, (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 19-52). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.