Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
ISSN: 2448-6469

ALME, Vol. 37 No. 1 P.p. 1-20. Periodo: Enero-junio 2024.
Recibido: julio 2023 Aprobado: febrero 2024. Publicado: junio 2024

MODELACIÓN MATEMÁTICA COMO PROPUESTA DE TRABAJO PARA SUPERAR OBSTÁCULOS Y DIFICULTADES EN EL CÁLCULO ESCOLAR. UNA EXPERIENCIA EN FORMACIÓN INICIAL DOCENTE

MATHEMATICAL MODELING AS A WORK PROPOSAL TO OVERCOME OBSTACLES AND DIFFICULTIES IN SCHOOL CALCULUS: AN EXPERIENCE IN INITIAL TEACHER TRAINING

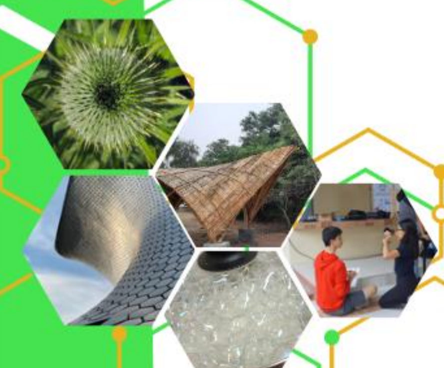
Iván Pérez-Vera, Paulina Salazar-Cortez
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. (Chile)
ivan.perez@umce.cl, paulinasalazarcortez@gmail.com

Resumen:
El artículo aborda la integración del cálculo en la educación secundaria y la formación docente, identificando dificultades en el aprendizaje de conceptos como límite, derivada e integral. Propone la modelación mediada por tecnología como alternativa metodológica para abordar estas dificultades, fomentando la discusión en torno a la generación de modelos y profundizando en la comprensión conceptual del cálculo escolar. Desde una perspectiva sociocultural, se reconoce que la matemática adquiere significado en diferentes contextos y se resignifica a través de la modelación. Los resultados indican que este proceso resignifica herramientas matemáticas, transformando la matemática escolar en un saber matemático escolar. La modelación promueve una evolución en la comprensión y aplicación de la matemática, enriquecida por la interacción entre contexto, herramientas matemáticas y experiencias del modelador, destacando su relevancia en la formación docente.

Palabras clave: modelación matemática, formación inicial docente, tecnología

Abstract:
The article addresses the integration of calculus in secondary education and teacher training, identifying difficulties in learning concepts such as limits, derivatives, and integrals. It proposes technology-mediated modeling as a methodological alternative to tackle these difficulties, fostering discussion around model generation and deepening the conceptual understanding of school calculus. From a sociocultural perspective, it is recognized that mathematics gains meaning in different contexts and is re-signified through modeling. The results indicate that this process reconfigures mathematical tools, transforming school mathematics into a scholarly mathematical knowledge. Modeling promotes an evolution in the understanding and application of mathematics, enriched by the interaction between context, mathematical tools, and the modeler's experiences, highlighting its relevance in teacher training.

Keywords: mathematical modeling, teacher training, technology



Introducción

El cálculo escolar en Chile, incorporación a nivel secundario y en formación de profesorado de matemática.

En Chile, los últimos años de educación secundaria (tercero y cuarto medio), están orientados desde las bases curriculares vigentes desde el año 2019, cuyas implementaciones se han realizado progresivamente desde el 2020 para tercero medio y 2021 para cuarto medio (MINEDUC, 2019a). Estas bases curriculares a nivel de matemática se proponen profundizar en funciones, geometría 3D y pensamiento estadístico-probabilístico, además se incorporan el pensamiento computacional, la programación y los conceptos fundamentales de cálculo infinitesimal, límites, derivadas e integrales. Nuestro interés está sobre estos últimos, asociados al cálculo escolar y que emergen como un programa curricular propio, denominado "Límites, derivadas e integrales" siendo parte del plan diferenciado de matemáticas para tercero y cuarto medio.

La primera unidad del programa de "límites derivadas e integrales" (MINEDUC Chile, 2019b) se enfoca en las funciones, explorando diversas representaciones y la relación entre la composición de funciones y la existencia de la función inversa. La segunda unidad se centra en los límites de funciones, abordando su existencia tanto en el infinito como en un punto, y su aplicación en contextos matemáticos y cotidianos. La tercera unidad introduce el concepto de derivadas, permitiendo a los estudiantes modelar situaciones que involucran cambios instantáneos y resolver problemas relacionados con el crecimiento, decrecimiento y puntos críticos de una función. Finalmente, la cuarta unidad se concentra en las integrales, explorando su aplicación en el cálculo de áreas bajo la curva y la modelación de fenómenos en diversos contextos, con énfasis en el desarrollo de estrategias colaborativas para resolver problemas no rutinarios.

A nivel de formación inicial de profesores de matemática, los tópicos asociados al cálculo escolar y que regulan la formación de profesores de matemática en Chile, se presentan en el documento "Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para Carreras de Pedagogía en Matemática", realizado por el Ministerio de Educación por medio del "Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas" (MINEDUC, 2021). De forma específica en el estándar sobre límites derivadas e integrales, se señala que a nivel disciplinar, los futuros profesores de matemática deben comprender y aplicar nociones fundamentales como límites, continuidad y derivabilidad de funciones. Utilizar estas herramientas para resolver problemas variados, desde la determinación de puntos críticos hasta la modelación de fenómenos que implican tasas de cambio y optimización. Además, exploran el cálculo integral, incluyendo el Teorema Fundamental del Cálculo y su aplicación en el cálculo de áreas y volúmenes. También estudian la convergencia de series y su aplicación en situaciones como el cálculo de interés (MINEDUC, 2021).

Dificultades en la enseñanza del cálculo escolar. Límites, derivadas e integrales.

Esta presencia a nivel curricular en términos del cálculo escolar, de forma específica de límites, derivadas e integrales, nos invita a realizar una revisión en la literatura en términos de qué obstáculos, errores y dificultades se han detectado desde la investigación en estos objetos matemáticos.

Hernández-Suárez et al. (2017) resaltan que la enseñanza del límite se centra principalmente en un enfoque algebraico, donde la simple sustitución del valor de tendencia en la expresión se presenta como válida, pero los estudiantes encuentran dificultades al enfrentarse a expresiones con límites factorizables. Además, se destaca el desconocimiento sobre la evaluación de la continuidad y la dificultad para determinar el tipo de discontinuidad. Por otro lado, Medina y Rojas (2015) revelan que las concepciones erróneas de los estudiantes sobre el límite se originan en obstáculos epistemológicos, manifestando imágenes mentales no pertinentes y adoptando concepciones algebraicas finitistas estáticas. La Plata y Malespina (2019) aportan a esta problemática al evidenciar que los estudiantes carecen de una comprensión clara del límite finito de una función real de variable real, presentando errores conceptuales, simbólicos y gráficos.

En el concepto de derivada de igual forma se han detectado problemáticas y obstáculos en el proceso de aprendizaje, las investigaciones señalan que, a pesar de una asimilación adecuada de procedimientos sistemáticos, como el cálculo de derivadas mediante su definición como límite, persisten errores y dificultades. González-García et al. (2018) evidencian problemas en la operación y simplificación de expresiones algebraicas, dificultades para cambiar estrategias de resolución, incapacidad para analizar funciones en formato tabular o gráfico, y confusión en la interpretación geométrica de la derivada. Montiel (2005) destaca innovaciones didácticas que buscan abandonar la visión algorítmica y estática del concepto, pero subraya la tendencia a centrarse en definiciones estáticas en lugar de abordar la actividad que dio origen y significado a la derivada. Gutiérrez et al. (2017) resaltan que, aunque los estudiantes muestran mecánica correcta en el cálculo de derivadas, enfrentan dificultades cognitivas y procedimentales al concebir la derivada como una razón de cambio, y presentan problemas algebraicos y aritméticos en la aplicación de reglas de derivación.

Basándonos en los antecedentes expuestos, hemos identificado dos focos principales en los que se centran los obstáculos, errores y dificultades en el aprendizaje y la enseñanza de los elementos del cálculo escolar, como los límites y las derivadas integrales. En primer lugar, encontramos una discrepancia entre lo conceptual y lo procedimental, donde las investigaciones destacan una tendencia hacia lo procedimental en la enseñanza del cálculo escolar, descuidando la comprensión conceptual de estos elementos. Por otro lado, se observa que uno de los principales obstáculos en la enseñanza del cálculo escolar radica en el enfoque exclusivo en un solo tipo de registro, principalmente el algebraico, sin aprovechar otros registros como el tabular, el gráfico o elementos propios de la modelación matemática.

La modelación matemática como metodología para el aprendizaje del cálculo escolar.

El estudio de Mejía et al. (2022) evidencia una mejora sustancial en la resolución de problemas matemáticos de precálculo y cálculo mediante la implementación de la modelación matemática como estrategia didáctica en la asignatura de Matemáticas, promoviendo un desarrollo equilibrado de las dimensiones de interacción, matematización y modelo matemático, sin diferencias notables en los resultados de las evaluaciones. Esta investigación sugiere que la modelación matemática puede ser una metodología efectiva para abordar conceptos esenciales del cálculo escolar. Por otro lado, el enfoque de Bravo y Rodríguez (2020) sobre la formación del concepto de integral doble a través de la modelación matemática respalda la eficacia de esta estrategia al facilitar la asimilación de los contenidos, promoviendo la implicación y motivación de los estudiantes, como destacan Peña-Páez y Morales-García (2016). La conexión entre la teoría y la práctica matemática emerge como un aspecto fundamental en este proceso. Asimismo, Molina-Mora (2017) enfatiza la efectividad de la modelación matemática en la enseñanza del cálculo al contextualizar y aplicar conceptos diversos, evidenciando una alta satisfacción entre los estudiantes al abordar la problemática inicial de desconocimiento de aplicaciones concretas de los contenidos del curso.

La modelación matemática en la formación inicial de profesores de matemática.

La inclusión de la modelación en la formación docente muestra avances significativos, según Ortiz y Mora (2015), quienes destacan la adquisición de una perspectiva funcional y la identificación de dificultades durante la planificación. Huincahue et al. (2017) abogan por una incorporación explícita en la formación inicial, promoviendo la experiencia práctica simultánea para adaptarse a demandas específicas. Forero (2020) destaca las oportunidades que brindan las experiencias fenomenológicas para cambiar prácticas de enseñanza, mientras que Pérez (2020) enfatiza el papel activo del profesor en formación en procesos de modelación. Mora (2015) subraya la importancia de vincular la disciplina con el contexto del estudiante, considerando la complejidad de la enseñanza de contenidos matemáticos. Aunque el uso de la modelación puede presentar desafíos, su integración en la formación inicial puede superar obstáculos y fomentar la disposición del futuro profesor hacia esta estrategia de enseñanza.

Nuestra problemática.

Dada la incorporación del cálculo en el currículo de educación secundaria y su integración en los estándares de formación inicial docente de matemática, junto con la identificación de obstáculos y dificultades en el aprendizaje de conceptos de límite, derivada e integral, considerando la modelación como una alternativa metodológica en la enseñanza del cálculo, planteamos la necesidad de diseñar una experiencia formativa desde una perspectiva de modelación, buscando promover la generación de diversas representaciones de los conceptos del cálculo escolar y profundizar en su comprensión conceptual, manteniendo al mismo las discusiones asociadas a lo procedimental.

Objetivo presente en este escrito.

En esta investigación, buscamos evidenciar como un proceso de modelación favorece la discusión procedimental de los objetos matemáticos en el marco de un contexto de experimentación.

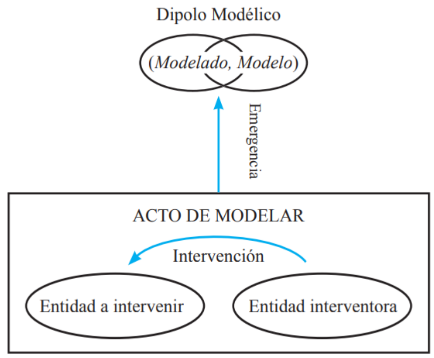
Antecedentes teóricos

Nuestra perspectiva de modelación.

Para este trabajo entendemos el conocimiento matemático desde la línea de Buendia (2013), en que la matemática toma sentido y significación a partir de prácticas no exclusivas de la misma estructura matemática, si no de aquellas que pertenecen a un universo sociocultural mayor. Siguiendo desde la línea sociocultural, Montiel (2010) señala sobre la matemática escolar, que, reconocida como campo del saber, es capaz de identificar los significados matemáticos asociados a ella según el escenario puesto en juego, ya sea por el conocimiento de los grupos humanos, confrontación de significados previos e insuficientes o bien, ante nuevas situaciones problema. Esto es lo que entendemos como resignificación de la matemática escolar. Lo anterior nos invita a vivenciar este trabajo desde la perspectiva de modelación propuesta por Arrieta y Diaz (2015), quienes consideran que los procesos de modelación existen en relación con la actividad humana.

Entonces, la modelación es una práctica de articulación de dos entes para intervenir en uno de ellos, denominado lo modelado, utilizando el otro, denominado modelo. Esta intervención puede tener diferentes propósitos, como la predicción, el diagnóstico o la evaluación. El ente se convierte en modelo cuando el actor lo emplea para influir en el otro ente, convirtiéndose así en una herramienta. Los entes matemáticos, al ser utilizados para modelar, se convierten en herramientas (Arrieta y Diaz, 2015, p.35).

Figura 1. *La modelación: el acto de modelar, el modelo, lo modelado y el dipolo modélico.*



Fuente: Arrieta y Díaz (2015).

En este sentido, el modelo matemático depende siempre de quien realiza la práctica de modelación y se entiende como tal cuando se utiliza como herramienta para abordar un fenómeno específico. Desde esta óptica, el modelo no existe de manera independiente, sino que surge en la actividad del modelador, quien, al articular el modelo y lo modelado, conforma un dipolo modélico. Desde esta perspectiva y en un contexto de modelación, Pérez-Vera (2020) reporta resultados de significación de la función cuadrática al modelar el desplazamiento inclinado. Señala Pérez-Vera (2020) que se evidencia como la construcción de un nuevo dipolo permite dar significado a distintos elementos del fenómeno, permitiendo a quien modela construir un modelo general que reúne los dipolos de forma separada y también a la red completa.

Uso de tecnologías en un contexto de modelación.

Según Rodríguez y Quiroz (2016), la integración de tecnologías en contextos de modelación matemática corresponde a un factor importante en cuanto a la vinculación entre lo analítico (respuestas matemáticas) y los datos proporcionados por la tecnología (respuestas físicas). De este modo, el uso de tecnologías, cuando se implementa estratégicamente durante el proceso de modelación, se convierte en un recurso valioso que facilita la conexión entre distintos aspectos del ciclo de modelación matemática. Además, el uso de tecnología en la modelación no solo resulta importante, sino incluso indispensable para generar relaciones significativas entre diversos dominios como el real, el físico y el matemático, brindando un apoyo sustancial a la vivencia de experiencias prácticas.

Para evaluar el uso de tecnologías en contextos de experimentación en el aula, nos posicionamos desde Artigue (2002), quien plantea la evaluación en términos pragmáticos, como eficiencia, coste y campo de validez, y también destaca que las tecnologías deben evaluarse en términos de un valor epistémico, que vele por el conocimiento disciplinar matemático en experiencias de su integración en el aula. Esto pues, las tecnologías contribuyen significativamente a la comprensión de los objetos matemáticos que involucran, convirtiéndose así en una fuente de cuestionamientos sobre la construcción de este conocimiento.

Gaona (2018) aporta definiendo seis dimensiones: el valor pragmático, el valor epistémico, la alineación curricular, los costos y flexibilidad de los recursos, y la participación. Su análisis se enfoca en la toma de decisiones con respecto a la integración de las tecnologías en el aula, y destaca que el valor epistémico no es intrínseco a la tecnología en sí misma, sino que se puede analizar a partir de las tareas mediadas por ella. En este sentido, es importante que la tecnología dialogue de manera disciplinar en implementaciones de aula, tanto en términos matemáticos como científicos, utilizando, por ejemplo, notación y elementos estructurales de la disciplina en cuestión, que permitan generar un diálogo constante.

Metodología

Paradigma metodológico.

La elección metodológica para nuestra investigación se fundamenta en el paradigma de la Investigación-Acción, ya que ofrece oportunidades significativas en el ámbito educativo al integrar la reflexión crítica y la acción directa para mejorar la propia práctica. Este enfoque permite a los educadores no solo identificar desafíos dentro de su entorno, sino también participar activamente en la resolución de problemas, promoviendo un aprendizaje continuo y una adaptación efectiva a las necesidades cambiantes de los estudiantes y las comunidades educativas (Pérez-Van-Leenden, 2019).

La Investigación-Acción no solo se limita a identificar problemas y proponer soluciones; también fomenta la innovación y la reflexión constante. A través de la aplicación de ciclos de investigación y acción, los docentes pueden experimentar con nuevas prácticas, evaluar sus impactos y ajustar en consecuencia. Este proceso iterativo no solo mejora la calidad de la enseñanza, sino que también contribuye al desarrollo profesional continuo, cultivando comunidades de aprendizaje donde la mejora es una práctica arraigada (Alban et al., 2020).

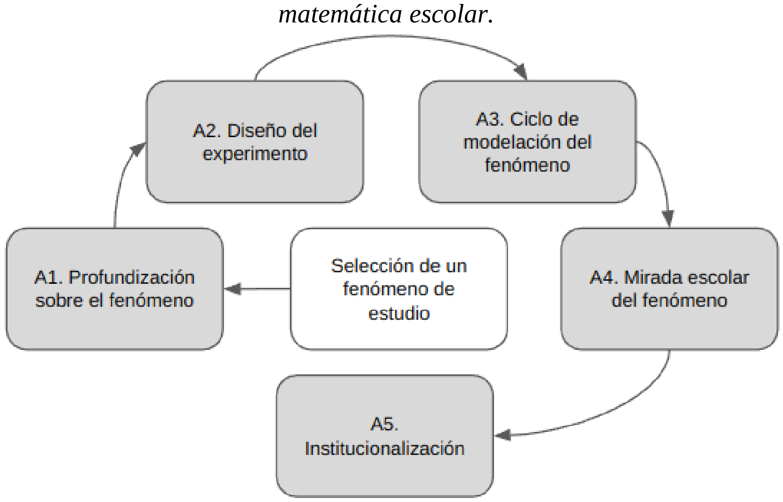
La Investigación-Acción emplea una variedad de instrumentos y herramientas que potencian la recopilación de datos y la toma de decisiones informadas. Técnicas como mapas sociales, entrevistas semiestructuradas, grupos focales y análisis participativo de fuentes secundarias se han destacado como eficaces para capturar la complejidad de los contextos educativos. Estos métodos permiten una comprensión más profunda de las experiencias y percepciones de los participantes, fundamentales para orientar las acciones correctivas y transformadoras (Espinoza, 2020).

Sobre la propuesta y su diseño.

Desde la postura de modelación de Arrieta y Diaz (2015) consideramos necesario establecer una postura sobre el diseño de situaciones de aprendizaje en un contexto de modelación matemática escolar con uso de tecnologías. Para lograr este propósito, utilizamos las estructuras propuestas por Balda (2022) y adaptada para la modelación propuesta por Pérez-Vera y Salazar-Cortez (2024) que considera cinco fases para el diseño de situaciones de aprendizaje desde un enfoque socioepistemológico, (1) introducción, (2) exploración, (3) procedimental, (4) consolidación, (5) ejercitación.

Entendiendo que nuestra necesidad es un contexto de modelación transitamos a una propuesta de diseño de situación de aprendizaje en un contexto de modelación matemática escolar en base a actividades, tomando como base un fenómeno a modelar, y generando como actividades (1) la profundización en el fenómeno, principalmente en la literatura e investigaciones, (2) el diseño de la experimentación y toma de datos, (3) Modelación matemática con uso de tecnologías, generación de diversos modelos como el modelo tabular, el modelo gráfico, el modelo algebraico y otros modelos no matemáticos, como esquemas, mapas mentales, dibujos y figuras. (4) Conceptualización y mirada escolar del fenómeno, identificar las posibilidades de enmarcar curricularmente la exploración y significar los modelos matemáticos obtenidos en diálogo con el fenómeno y experimento realizado. (5) institucionalización de los objetos matemáticos puestos en juego (Pérez-Vera y Salazar-Cortez, 2024). Este tránsito de las fases propuestas por Balda (2022) a una específica para la modelación, creemos que representa una fortaleza en nuestra experiencia.

Figura 2. *Actividades para el diseño de una situación de aprendizaje en un contexto de modelación matemática escolar.*



Fuente: Pérez-Vera y Salazar-Cortez (2024)

Sobre la implementación.

La implementación de la propuesta se realizó en la carrera de licenciatura en educación matemática de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (UMCE) durante el segundo semestre de 2023, abarcando los meses de agosto a noviembre. El curso que servirá de base para el desarrollo de la implementación se encuentra en el sexto semestre de formación de los futuros profesores de matemática y tiene por nombre "TICs para la Enseñanza de la Matemática I" de código MMAT604, curso que tiene por competencias principales a desarrollar (1) la evaluación de tecnologías y (2) el diseño de situaciones de aprendizaje con uso de tecnologías, lo que propicia una alta articulación con la propuesta que se espera desarrollar. Participan un total de 18 estudiantes en un total de 14 semanas. El estudiantado que participa, al encontrarse MMAT604 en el 6to semestre, ha aprobado de forma previa los cursos de cálculo integral y cálculo diferencial, además de los cursos previos de tecnologías, Fundamentos TICs y TICs para el aprendizaje de la matemática.

Los principales instrumentos de recolección de información fueron las (1) reflexiones y análisis del estudiantado en formatos de informe con periodicidad semanal, (2) Observación participante y (3) diario de campo del investigador, quien cumple además con la labor de ser el profesor del curso y quien lidera la implementación de la propuesta.

Resultados

Con el fin de profundizar en los análisis se presentará en detalle la experiencia de un grupo de trabajo conformado por dos estudiantes. Este grupo en su elección de fenómeno de estudio el desplazamiento sobre el plano inclinado, a continuación, se presentan los resultados de su proceso en términos de (1) la profundización en el fenómeno (2) el diseño de la experimentación (3) Modelación matemática con uso de tecnologías. (4) Conceptualización y mirada escolar del fenómeno (5) institucionalización de los objetos matemáticos puestos en juego.

Investigación y profundización del fenómeno.

La revisión bibliográfica realizada por los estudiantes se concentró en seis documentos, tres artículos científicos, un texto escolar y dos guías docentes curriculares. La revisión se centra en la exploración de variables físicas y matemáticas que participan en el desplazamiento inclinado, se identifican como principales variables en juego la masa, la velocidad, aceleración, tiempo, fuerza de gravedad, coeficientes de roce y geometría del objeto en movimiento. Se reconoce a Galileo como un precursor clave en el estudio del movimiento en planos inclinados, destacando su contribución al establecimiento de las bases para el entendimiento del movimiento uniformemente acelerado.

Además, se resalta la importancia de las leyes fundamentales de la física, como la ley de la inercia de Newton, para explicar la persistencia del movimiento de los objetos. Los estudiantes demuestran un interés particular en la fuerza de roce por deslizamiento, haciendo hincapié en su relación con el coeficiente de roce, el cual depende del material y la rugosidad de las superficies en contacto. Asimismo, se aborda la aceleración como un factor determinante en el cambio de la velocidad de un objeto, independientemente de si es un aumento o una disminución.

Figura 3. *Profundización en el fenómeno de estudio.*

Consideramos a un bloque de masa m deslizando por la superficie de un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal (Fig.1) y que presenta rozamiento de coeficiente cinético μ El trabajo W de la fuerza de rozamiento a lo largo del trayecto de longitud L es:

$$W = -\mu m g L \cos(\theta) = -\mu m g D$$

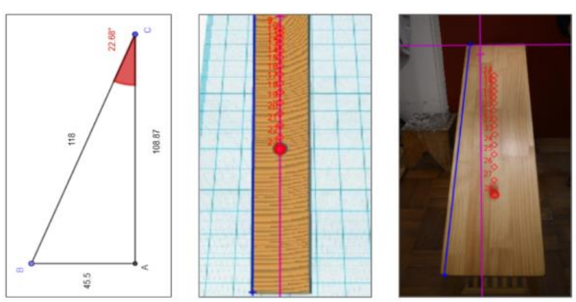
...Este párrafo da cuenta de cómo se relacionan diferentes aspectos del fenómeno como masa, geometría, inclinación y roce. En este caso, como el objeto no rueda, la fuerza de roce hace trabajo

Fuente: producción de estudiantes.

Diseño de la experimentación.

La experimentación se diseñó en dos ambientes, ambos con las medidas presentadas en el triángulo de la figura [insertar número de figura]. La primera experimentación se realizó en un ambiente digital de simulación, utilizando el laboratorio de simulación del software TinkerCAD, que tiene la ventaja de poder seleccionar los materiales involucrados. La segunda experimentación se realizó de forma concreta utilizando madera para el plano inclinado y una tapa de botella. En ambos casos la toma de datos se realiza con el software tracker de análisis físico de videos.

Figura 4. *Diseño de experimento, simulación y experimentación.*



Fuente: producción de estudiantes.

Ciclo de modelación matemática.

La experiencia, tanto la simulación como la concreta, permitieron a los estudiantes obtener datos, manipularlos y construir los modelos tabulares correspondientes para cada experimento, señalan además que t corresponde al tiempo y x la distancia que recorre el objeto en metros.

Figura 5. *Modelos tabulares empíricos y simulación.*

t	x	t	x	t	x
0,0000	0,0196	0,3754	0,1611	0,7508	0,4972
0,0417	0,0239	0,4171	0,1874	0,7925	0,5503
0,0834	0,0343	0,4588	0,2191	0,8342	0,6082
0,1251	0,0471	0,5005	0,2514	0,8759	0,6765
0,1668	0,0599	0,5422	0,2819	0,9176	0,7540
0,2085	0,0757	0,5839	0,3222	0,9593	0,8315
0,2503	0,0934	0,6256	0,3575	1,0010	0,9266
0,2920	0,1154	0,6673	0,4014	1,0427	1,0108
0,3337	0,1373	0,7090	0,4515	1,0844	1,1322

Datos experiencia empírica

t	x	t	x	t	x
0,0000	0,0024	0,3333	0,1223	0,6667	0,4530
0,0333	0,0123	0,3667	0,1441	0,7000	0,5033
0,0667	0,0183	0,4000	0,1659	0,7333	0,5599
0,1000	0,0252	0,4333	0,1897	0,7667	0,6197
0,1333	0,0331	0,4667	0,2214	0,8000	0,6826
0,1667	0,0430	0,5000	0,2521	0,8333	0,7534
0,2000	0,0569	0,5333	0,2848	0,8667	0,8320
0,2333	0,0708	0,5667	0,3215	0,9000	0,9091
0,2667	0,0876	0,6000	0,3617	0,9333	0,9971
0,3000	0,1035	0,6333	0,4058	1,0000	1,1969

Datos experiencia simulación

Fuente: producción de estudiantes.

La identificación de las variables físicas comprometidas (Posición, aceleración, fuerza de gravedad, movimiento acelerado) permiten a los estudiantes establecer que el gráfico se aproxima a un polinomio de grado dos, reforzando esta afirmación con la idea de que la aceleración es la razón de cambio de la posición. Construyen el modelo algebraico con apoyo de la herramienta de ajuste cuadrático de GeoGebra, reportándolas por separado, como dos momentos distintos, la simulación y la experimentación.

Figura 6. *Modelos algebraicos.*

Podrán aquí ver que los puntos correspondientes a la experiencia empírica se aproximan a

$$f(x) = 0{,}97x^2 - 0{,}1x + 0{,}04,$$

Y en la simulación digital a la siguiente curva,

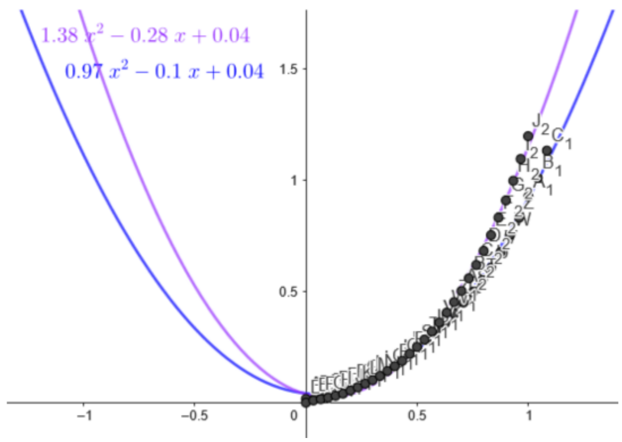
$$g(x) = 1{,}38x^2 - 0{,}28x + 0{,}04,$$

Obs: En este experimento el objeto está constantemente bajo influencia de la fuerza de gravedad, lo que supone un movimiento acelerado, es decir, la posición varía según una aceleración y en consecuencia el gráfico de la posición en el tiempo se aproxima a un polinomio de grado 2, ya que la aceleración es la razón de cambio de la razón de cambio de la posición

Fuente: producción de estudiantes.

Para construir el modelo geométrico, los estudiantes utilizaron el software GeoGebra, que también fue el software empleado para crear los modelos algebraicos. A diferencia de los modelos algebraico y tabular, que se realizaron y presentaron por separado, ambos modelos gráficos (el de la simulación y el concreto) fueron presentados en una misma gráfica, proporcionando información para identificar las diferencias y similitudes entre ambas experimentaciones. Además, mediante el mismo software, se presentan las ecuaciones discutidas junto con la gráfica correspondiente, lo que facilita la comparación y comprensión de los resultados obtenidos.

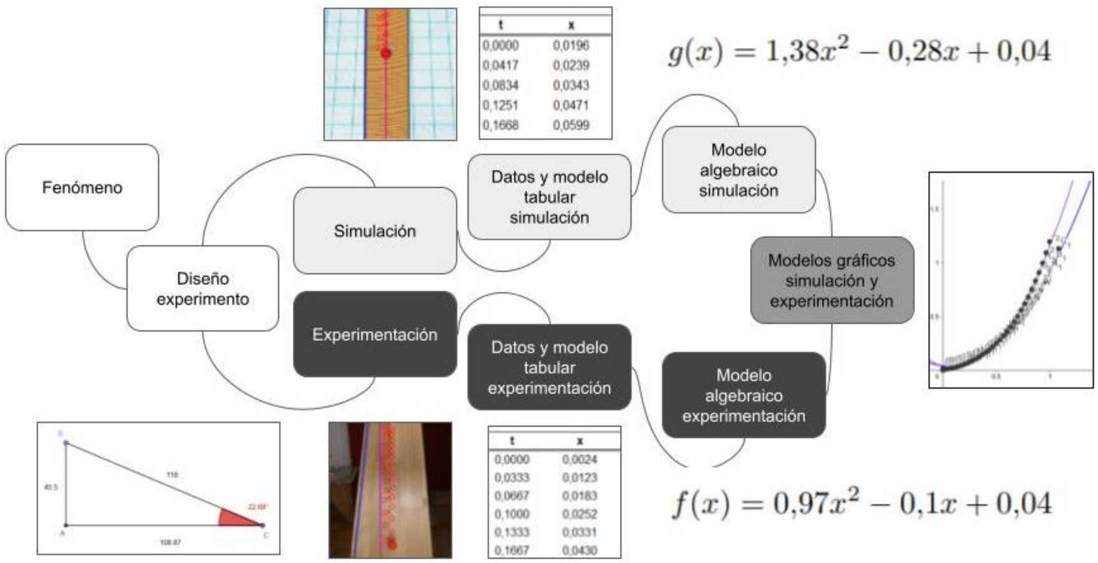
Figura 7. *Modelos gráficos.*



Fuente: producción de estudiantes.

Al realizar una revisión retrospectiva del proceso de modelación, se identifica que el ciclo experimentado por los estudiantes atraviesa distintas etapas, cada una marcada por la adopción de diversos modelos. Inicialmente, el fenómeno bajo estudio se aborda diseñando y ejecutando una experimentación que se materializa de dos maneras: mediante una simulación y a través de una experimentación con materiales concretos. Ambas aproximaciones dan lugar a la emergencia de modelos tabulares, ricos en información, los cuales, a su vez, sirven de base para la elaboración de modelos algebraicos y, finalmente, modelos gráficos. Estos últimos son especialmente relevantes dentro del ciclo de modelación, principalmente porque ambas experiencias, simulación y experimentación, convergen en diálogos en una sola gráfica, lo que nos permite afirmar que la modelación no se limita a un tratamiento algebraico exclusivo, sino que facilita la conversación y la transición entre diferentes modelos. Este proceso enriquece la comprensión del fenómeno estudiado al permitir la identificación de sus distintas facetas desde una perspectiva integral.

Figura 8. *Ruta de construcción del ciclo de modelación, experiencia empírica y simulación.*



Fuente: producción propia.

Institucionalización y conceptualización.

Cada modelo contribuye con elementos específicos al entendimiento global del fenómeno, pero es la convergencia de todas las representaciones la que ofrece una visión más completa y compleja. Se destaca que la conceptualización de los objetos matemáticos no constituye una etapa final, sino un proceso continuo que se profundiza con el avance del ciclo de modelación. Desde los momentos iniciales, como la experimentación o el diseño experimental, emergen conceptos impulsados por las necesidades o características del fenómeno estudiado. A medida que el ciclo avanza, cada modelo contribuye no solo a la conceptualización del objeto matemático en cuestión, sino también a la del propio fenómeno modelado. Esto implica que no solo se moviliza el conocimiento matemático, sino también se integran elementos del contexto, otorgando así significado contextual a los objetos matemáticos, más allá de su dimensión puramente matemática. Para ejemplificar esto, se presenta un análisis reflexivo realizado por los estudiantes.

Figura 9. *Significados de la derivada.*

Una vez obtenido el gráfico de posición y tiempo usando ajuste polinómico de grado 2, podemos derivar esta función (la llamaremos función posición) respecto al tiempo para obtener su razón de cambio. La razón de cambio de la función posición respecto al tiempo es lo que llamamos velocidad. Podemos derivar la función velocidad para encontrar la función aceleración, es decir, la razón de cambio de la velocidad respecto al tiempo.

Fuente: producción de estudiantes.

En el análisis realizado por los estudiantes, presentan que la derivada recibe su significado como el estudio del cambio en un contexto de modelación del plano inclinado, esto nos permite evidenciar que el proceso de modelación del fenómeno, al poner en juego objetos matemáticos, favorece su significación.

En un proceso posterior dentro del desarrollo de la modelación del plano inclinado, los estudiantes señalan que al conocer la aceleración y conocer a esta como una constante, permite establecer a la velocidad como la integral de la aceleración, esta discusión se presenta en la imagen a continuación.

Figura 10. *Reflexión sobre aceleración e integral.*

Finalmente hemos obtenido una expresión para calcular la aceleración del objeto. Dada la naturaleza del fenómeno, la aceleración es constante y conociéndola también podemos conocer la posición y velocidad del objeto en función del tiempo. Dado que que la velocidad es la integral de la aceleración, y la aceleración es una constante, tendremos que la velocidad del objeto en función del tiempo será:

$$V(t) = at$$

de manera análoga, la posición del objeto en función del tiempo queda definida por:

$$X(t) = at^2(0{,}5)$$

La actividad propuesta es determinar μ experimentalmente y calcular con el modelo descrito la aceleración del objeto dado un ángulo específico para luego comprobar si se puede observar lo mismo empíricamente al hacer las mediciones con tracker y el análisis de datos en geogebra, Es decir, si lo observado se corresponde con lo teórico.

Fuente: producción de estudiantes.

Conclusiones

***Modelación matemática y superación de dificultades*.**

Identificamos inicialmente que las principales dificultades en la enseñanza del cálculo escolar están asociadas a un tratamiento predominantemente procedimental de los conceptos y a un enfoque en un único registro, generalmente el algebraico. La incorporación de la modelación, por su naturaleza, favorece la emergencia de diversos modelos (o registros); en esta experiencia, desde la experimentación y la simulación, surgen lo tabular, lo gráfico y lo algebraico. Estos diferentes modelos dialogan entre sí para aportar mayor información al análisis. Los modelos gráficos de ambas experiencias se presentan en el mismo plano cartesiano mediante el uso de GeoGebra, lo que demuestra inicialmente que la generación de diversos modelos o representaciones es parte integral de la actividad de modelar. Tomando esto como base, y la generación de diálogos entre modelos junto con los saberes procedimentales, se facilita un tránsito hacia lo conceptual. Esto significa que lo procedimental, que se pone en juego en un proceso de modelación, se fortalece con los diálogos que se generan entre los diversos modelos emergentes, avanzando hacia un tratamiento más conceptual de los objetos matemáticos. También evidenciamos que lo conceptual no es una fase final en el proceso de modelación; se desarrolla a lo largo de todo el proceso, y su avance o profundidad se ve potenciado por los diversos modelos y cómo se articulan entre sí. Esto nos permite entender que los modelos no solo son representaciones del fenómeno; también son formas variadas de aproximarse a los objetos matemáticos.

***Rol de las tecnologías en la facilitación del proceso de modelación*.**

El valor pragmático de la tecnología representa la mayor fortaleza observada en esta experiencia. Las tecnologías proporcionan una base, evidenciada principalmente en la diversidad de modelos en sus versiones digitales, que favorece la discusión en términos del valor epistémico y facilita la transición de lo procedimental a lo conceptual. Las tecnologías enriquecen la discusión; aunque es posible realizar el proceso de modelación sin herramientas tecnológicas, la variedad de modelos está intrínsecamente relacionada con el uso de tecnología. En esta experiencia, fue posible analizar el fenómeno a través de dos rutas: la experimentación con análisis de software y la simulación para la toma de datos. Ambas experiencias, íntegramente tecnológicas, se articulan desde un valor pragmático, propiciando discusiones que confieren un alto valor epistémico al proceso de modelación.

***Retos enfrentados por educadores y estudiantes durante la implementación de la modelación matemática y el uso de tecnologías*.**

En el proceso de implementación de la modelación matemática y la integración de tecnología en el ámbito educativo, se evidenciaron diversas dificultades, entre las cuales destacó el cambio en la dinámica de la enseñanza en el aula. Inicialmente, los estudiantes se encontraban habituados a clases tradicionales, caracterizadas por una transmisión unidireccional de información, lo cual generaba un desafío al invitarlos a participar activamente en procesos de modelación. Esta transición exigía una mayor implicación, reflexión y protagonismo por parte de los estudiantes en su proceso formativo, lo cual representaba un cambio significativo en su rol dentro del aula. Superar esta barrera inicialmente se reveló como uno de los desafíos más complejos, tanto en lo que respecta a la adopción de la modelación matemática como al uso de tecnología.

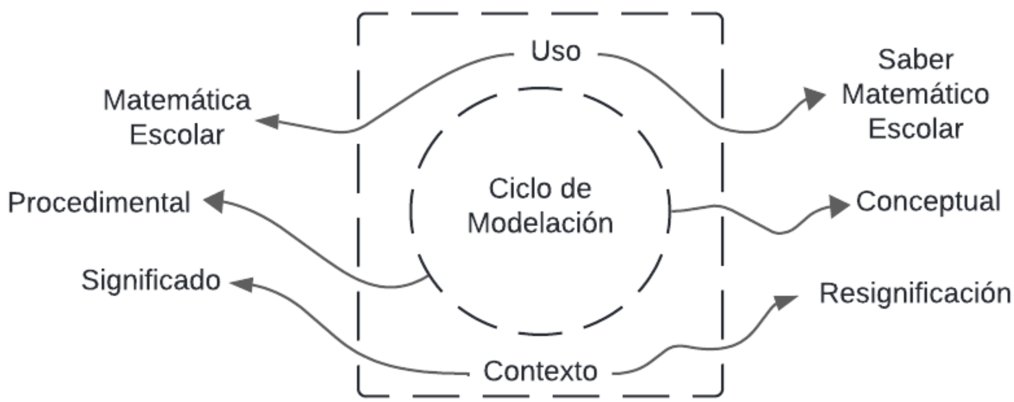
La introducción de tecnologías, al no ser una práctica previa para los estudiantes, constituía otro obstáculo inicial. La falta de familiaridad o habilidades en el manejo de la tecnología dificultaba la obtención de los resultados esperados en el proceso de modelación. Para superar esta dificultad, se implementó un acompañamiento constante en el aula, con el fin de apoyar a los estudiantes en la superación de esta barrera tecnológica. Dado que el enfoque del curso se centraba en la evaluación de tecnología, aunque complejo, este aspecto resultó más abordable, pues se anticipaba que la tecnología representaría un desafío para los estudiantes. En consecuencia, uno de los objetivos del curso consistía en facilitar la superación de estos obstáculos. Inicialmente, la combinación de liderar los procesos de modelación y la integración de tecnologías para el análisis se presentó como un desafío significativo. No obstante, a medida que se superaban estas dificultades, se observaba un progreso notable y los estudiantes lograban incorporar herramientas tecnológicas en sus actividades reflexivas de modelación, lo que les permitía alcanzar resultados satisfactorios y profundizar en las discusiones académicas.

Relación de hallazgos con la perspectiva sociocultural del aprendizaje matemático.

La modelación desde la perspectiva sociocultural se fundamenta en las herramientas matemáticas del modelador, las cuales, en interacción con las experiencias, generan un entendimiento profundo del fenómeno estudiado. Esta intervención implica una reconfiguración de las herramientas de quien modela, dando lugar a la emergencia de nuevas herramientas matemáticas que adquieren sentido y significado dentro del contexto específico en el que se desarrollan.

La existencia de una matemática escolar, junto con los significados iniciales de los conceptos matemáticos y el enfoque procedimental de la matemática, conforman un escenario fundamental. Cuando estos tres elementos se incorporan en la vivencia de un ciclo de modelación y se integran en todo el proceso, observamos cómo la matemática escolar se transforma en un saber matemático escolar. Es decir, que los significados inherentes a la matemática escolar experimentan una resignificación contextualizada, mientras que los procedimientos utilizados en el ciclo de modelación se convierten en conocimiento conceptual. De esta manera, los ciclos de modelación promueven una evolución significativa en la comprensión y aplicación de la matemática, enriquecida por la interacción dinámica entre el contexto, las herramientas matemáticas y las experiencias del modelador, aportando de forma significativa en procesos de formación inicial docente.

Figura 11. *Transformaciones al vivenciar un ciclo de modelación matemática escolar.*



Fuente: producción propia.

***Sobre la incorporación de la modelación matemática en la formación inicial de docentes de matemática*.**

Finalmente, en términos de la incorporación de la modelación matemática escolar en la formación inicial de profesores de matemática, dimos cuenta que en términos de superación de obstáculos se presenta un alto logro. Sin embargo, creemos que el aporte es mucho más profundo, primero desde lo metodológico, rompiendo la estructura de clase tradicional, no en términos de participar en una nueva metodología o forma de hacer clases, se trata en forma simple, pero consistente, en acercar a los futuros profesores de matemática a vivenciar la actividad matemática entendida como el quehacer del matemático y repensar sobre su futura actividad en el aula.

Referencias bibliográficas

Alban, G., Arguello, A., y Molina, N. (2020). Metodologías de investigación educativa (descriptivas, experimentales, participativas, y de investigación-acción). *RECIMUNDO*, *4*(3), 163–173. https://doi.org/10.26820/recimundo/4.(3).julio.2020.163-173

Arrieta, J., y Díaz, L. (2015). Una Perspectiva De La Modelación Desde La Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *RELIME*, *18*(1), 19–48.

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245–274. https://doi.org/10.1023/A:1022103903080

Balda, P. (2022). Estructura para el diseño de situaciones de aprendizaje desde un enfoque socioepistemológico. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*. https://doi.org/10.46618/iime.148

Bravo, J., y Rodríguez, L. (2020). Formación del concepto de integral doble mediante la modelación matemática en la carrera de ingeniería informática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *33*(1), 400–409.

Buendía, G. (2013). *La construcción social del conocimiento matemático escolar un estudio socioepistemológico sobre la periodicidad de las funciones*.

Espinoza, E. (2020). Reflexiones sobre las estrategias de investigación acción participativa. *Revista Conrado*, *16*(76), 342–349.

Forero, A. (2020). Procesos de modelación matemática en formación de profesores de matemáticas. *Revista de la Facultad de Ciencias*, *9*(2), 66–79.

Gaona, J. (2018). Integrar tecnología en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, factores claves. *REGIES: Revista de Gestión de la innovación*, *3*(1), 75–93.

González-García, A., Muñiz-Rodríguez, L., y Rodríguez-Muñiz, L. (2018). Un estudio exploratorio sobre los errores y las dificultades del alumnado de Bachillerato respecto al concepto de derivada. *Aula Abierta*, *47*(4), 449–462. https://doi.org/10.17811/rifie.47.4.2018.449-462

Gutiérrez, L., Buitrago, M., y Ariza, L. (2017). Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica. *Revista Científica General José María Córdova*, *15*(20), 137–153.

Hernandez-Suarez, C., Prada-Núñez, R., y Ramírez-Leal, P. (2017). Obstáculos epistemológicos sobre los conceptos de límite y continuidad en cursos de cálculo diferencial en programas de ingeniería. *Revista Perspectivas*, *2*(2), 73–83. https://doi.org/10.22463/25909215.1316

Huincahue, J., Borromeo-Ferri, R., y Mena-Lorca, J. (2017). El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, *36*(1), 99–115. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2277

La Plata, C., y Malaspina, U. (2019). *Errores en torno a la comprensión de la definición de límite finito de una función real de variable real* [Contribución a Actas de Congreso]. http://clame.org.mx/actas/

Medina, A., y Rojas, C. (2015). *Obstáculos cognitivos en el aprendizaje de las matemáticas: El caso del concepto de límite* (R. Flores, Ed.; Vol. 28, pp. 330–336). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. http://funes.uniandes.edu.co/10791/

Mejía, L., Gallo, C., y Quintana, D. (2022). La modelación matemática como estrategia didáctica para la resolución de problemas matemáticos. *Horizontes. Revista de Investigación en Ciencias de la Educación*, *6*(26), 2204–2218. https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v6i26.485

MINEDUC (2021). *Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para Carreras de Pedagogía en Matemática* (Ministerio Educación de Chile).

MINEDUC (2019a). *Bases Curriculares 3° y 4° Medio*. https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Bases-curriculares/91414:Bases-Curriculares-3-y-4-Medio

MINEDUC (2019b). *Límites, Derivadas e Integrales* (Unidad de Currículum y Evaluación).

Molina-Mora, J. (2017). Experiencia de modelación matemática como estrategia didáctica para la enseñanza de tópicos de cálculo. *Uniciencia*, *31*(2), 19–36.

Montiel, G. (2005). Interacciones en un escenario en línea: El papel de la socioepistemología en la resignificación del concepto de derivada. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *8*(2), 219–235.

Montiel, G. (2010). Hacia el rediseño del discurso: Formación docente en línea centrada en la resignificación de la matemática escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(4(I)), 69–84.

Mora, A. (2015). Modelación matemática en la formación de profesores. En J. Ortiz (Ed.), *Investigaciones en educación matemática. Aportes desde una unidad de investigación* (Vol. 1, pp. 1–13). Universidad de Carabobo. http://riuc.bc.uc.edu.ve/handle/123456789/2749

Ortiz, J., y Mora, A. (2015). Capacidades didácticas en el diseño de tareas con modelación matemática en la formación inicial de profesores. *Perspectiva Educacional*, *54*(1), 110–130. https://doi.org/10.4151/07189729-Vol.54-Iss.1-Art.281

Peña-Páez, L., y Morales-García, J. (2016). La modelación matemática como estrategia de enseñanza-aprendizaje: El caso del área bajo la curva. *Revista Educación en Ingeniería*, *11*(21), 64–71. https://doi.org/10.26507/rei.v11n21.637

Pérez-Van-Leenden, M. (2019). La investigación acción en la práctica docente. Un análisis bibliométrico (2003-2017). *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, *12*(24), 177–192. https://doi.org/10.11144/Javeriana.m12-24.ncev

Pérez-Vera, I. (2020). Una significación de los coeficientes de una función cuadrática: Una experiencia de modelación en formación de profesores. *Paulo Freire. Revista de Pedagogía Crítica*, *23*, 177–194. https://doi.org/10.25074/07195532.23.1657

Pérez-Vera, I. y Salazar-Cortez, P. (2024). Diseño de un curso de formación inicial para profesores, que integra la modelación matemática escolar con evaluación de tecnologías. El Cálculo y su Enseñanza, (ISSN: 2007-4107). En prensa.

Rodriguez, R., y Quiroz, S. (2016). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *19*(1), 99–124. https://doi.org/10.12802/relime.13.1914